Реализация моделей исследования операций

Цель работы - ознакомиться с основами построения моделей исследования операций.

Порядок выполнения работы

При выполнении каждого задания необходимо решить задачу и реализовать решение задачи с помощью Python.

1. Задача о добыче и производстве балласта

Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Бульдозеры, маш.-ч	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Трудовые ресурсы, чел.-ч	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль, тыс. ден. ед.	c_1	c_2	c_3	

Потребность в балласте песчано-гравийном не превышает 8 тыс. м^3, в балласте щебеночном – 5 тыс. м^3. Определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль. Варианты заданий приведены в таблице 2.

Таблица 2

Варианты задания

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	20	22	32	6	4	8	30	50	42	250	72	450	40	30	35
2	18	24	25	10	6	9	30	50	43	270	80	500	18	15	17
3	16	32	32	9	4	6	40	60	44	290	80	530	10	12	11
4	17	25	32	9	5	9	42	55	50	300	82	550	8	6	8
5	18	32	27	9	6	8	43	60	52	310	84	560	8	6	7
6	19	32	22	9	5	4	44	60	50	320	86	550	10	12	15
7	13	27	24	8	4	6	50	30	50	230	50	610	6	10	12
8	14	29	27	9	5	4	52	30	34	240	52	600	8	5	6
9	15	27	26	7	4	4	54	32	30	230	50	620	6	10	8
10	16	28	40	8	6	3	55	30	65	250	54	700	7	6	5

2. Строящаяся линия разбита на четыре различных по протяженности

участка, на которых производятся балластировочные работы. Имеются три балластных карьера, мощность которых достаточна для покрытия общей потребности участков в балласте и составляет соответственно a_1, a_2 тыс. м^3 балласта. Потребность каждого участка в балласте равна соответственно b_1, b_2 тыс. м^3. Карьеры и участки линии связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки и соответственно затраты на перевозку тыс. м^3 балласта c_{ij} ($i = 1, 2$, $j = 1, 2$).

Требуется прикрепить балластные карьеры к участкам линии таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в балласте при минимальных общих затратах на перевозки. Исходные данные и варианты заданий приведены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Исходные данные

Поставщики	Потребители		Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	
1	c_{11}	c_{12}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	a_2
Спрос потребителей, тыс.м^3	b_1	b_2	

Таблица 4

Варианты задания

Вариант	Стоимость				Мощность поставщиков		Спрос потребителей	
	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	a_1	a_2	b_1	b_2
1	7	5	2	3	14	29	18	20
2	8	4	10	7	22	31	28	12
3	5	3	7	8	23	22	16	12
4	8	9	7	6	24	35	15	27
5	4	7	4	5	23	25	13	20
6	6	4	10	5	27	22	29	20
7	10	9	4	5	35	25	27	15
8	4	8	12	9	22	31	28	12
9	6	7	9	10	25	20	20	13
10	8	6	9	8	35	25	27	15

3. Задача о назначениях

Строительной компании необходимо выполнить бетонные работы на 4 строящихся объектах. В фирме имеется 4 бригады бетонщиков, которые могут выполнить эту работу. Бригадиры каждой бригады побывали на объектах, оценили объемы работ и рассчитали сроки, за которые они могут выполнить работы (таблица 5).

Таблица 5

Исходные данные

Бригада	Объект			
	1	2	3	4
№1	30	40	50	60
№2	N+30	N+40	N+50	58
№3	N+20	44	49	N+50
№4	35	N+30	N+40	63

Перед руководством фирмы стоит задача распределения бригад по объектам таким образом, чтобы суммарный срок выполнения всех работ был минимальным.

4. *Задача распределения ресурсов*

Необходимо распределить рабочих на строительство новых четырех объектов, чтобы выполнить максимальный объем строительно-монтажных работ, если известно, что объем СМР на объектах в зависимости от количества рабочих, направляемых на эти объекты, различен.

Таблица 6

Варианты заданий

Вариант	Количество рабочих	Номера объектов			
		1	2	3	4
		Объем СМР, тыс. руб.			
1	0	0	0	0	0
	11	7	9	6	13
	22	14	15	18	16
	33	30	19	24	27
	44	33	27	36	35
2	0	0	0	0	0
	12	8	9	8	6
	24	15	19	15	18
	36	27	28	24	25
	48	30	35	32	33
3	0	0	0	0	0
	13	6	7	8	8
	26	12	14	13	16
	39	21	19	26	26
	52	30	32	29	31
4	0	0	0	0	0
	14	7	8	4	6
	28	15	20	9	16
	42	21	24	19	20
	56	33	34	30	32
5	0	0	0	0	0
	15	8	9	8	6
	30	14	18	14	12
	45	27	28	21	25

	60	30	35	32	34
6	0	0	0	0	0
	16	6	7	8	8
	32	12	14	16	17
	48	21	14	26	25
	64	29	30	32	32
7	0	0	0	0	0
	17	8	9	7	6
	34	14	16	16	10
	51	24	25	22	18
	68	32	33	30	24
8	0	0	0	0	0
	18	3	6	9	10
	36	9	12	16	15
	54	16	19	22	20
	72	21	30	32	32
9	0	0	0	0	0
	19	7	6	9	8
	38	14	15	18	16
	57	27	28	24	25
	76	30	35	32	33
10	0	0	0	0	0
	20	5	7	6	5
	40	12	13	15	13
	60	21	22	20	20
	80	25	26	27	26

Пример выполнения работы

Задача 1

Постановка задачи. Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице 1.3. Потребность в балласте песчано-гравийного не превышает 8 тыс. м^3, в балласте щебеночном – 5 тыс. м^3. Требуется определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль.

Таблица 1.3 – **Исходные данные задачи**

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	14	18	23	420
Бульдозеры, маш.-ч	8	5	6	100
Трудовые ресурсы, чел.-ч	32	45	54	720
Прибыль, тыс. ден. ед.	68	70	75	

Построим ***математическую модель*** задачи.

Обозначим через x_1 – объем добычи и производства балласта песчаного, x_2 – балласта песчано-гравийного, x_3 – балласта щебеночного.

Тогда целевая функция описывает прибыль

$$z = 68\,x_1 + 70\,x_2 + 75\,x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях

– на использование ресурсов:

- экскаваторов $14\,x_1 + 18\,x_2 + 23\,x_3 \le 420;$
- бульдозеров $8\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 \le 100;$
- трудовых ресурсов $32\,x_1 + 45\,x_2 + 54\,x_3 \le 720;$

– на объемы производства балласта:

- песчано-гравийного $x_2 \le 8;$
- щебеночного $x_3 \le 5;$

условие неотрицательности: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Решим задачу ***симплексным методом***. Представим математическую модель задачи в канонической форме записи. Добавим к левым частям системы ограничений дополнительные переменные $x_{3+i} \ge 0$ ($i = \overline{1,5}$):

$$
\begin{aligned}
&14x_1 + 18x_2 + 23x_3 + x_4 = 420,\\
&8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_5 = 100,\\
&32x_1 + 45x_2 + 54x_3 + x_6 = 720,\\
&x_2 + x_7 = 8,\\
&x_3 + x_8 = 5,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,8}.
\end{aligned}
$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$z = 68x_1 + 70x_2 + 75x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8,$$

где x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 – базисные переменные;

x_1, x_2, x_3 – небазисные (свободные) переменные.

Построим начальный базисный план. Точку (0, 0, 0) используем как начальное допустимое решение, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Тогда $x_4 = 420, x_5 = 100, x_6 = 720, x_7 = 8, x_8 = 5$.

$X^0 = (0, 0, 0, 420, 100, 720, 8, 5)$ – начальный базисный план.

При этом

$z(X^0) = 68 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 75 \cdot 0 + 0 \cdot 420 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 720 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 5 = 0.$

Заполним первую симплекс-таблицу (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – **Симплекс-таблица начального допустимого решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	18	23	1	0	0	0	0	420	18,3
x_5	0	8	5	6	0	1	0	0	0	100	16,7
x_6	0	32	45	54	0	0	1	0	0	720	13,3
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	8	
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	5	5
z-строка	1	– 68	– 70	– 75	0	0	0	0	0	0	

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^0 не является оптимальным. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине (–75), столбец x_3 выбираем в качестве ведущего. Для положительных элементов ведущего столбца находим наименьшее из симплексных отношений $\theta = 5$, x_8 – ведущая строка. Элемент 1 на пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.5).

Таблица 1.5 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Реше-ние	θ
x_4	0	14	18	0	1	0	0	0	– 23	305	17
x_5	0	8	5	0	0	1	0	0	– 6	70	14
x_6	0	32	45	0	0	0	1	0	– 54	450	10
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	8	8
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	– 68	– 70	0	0	0	0	0	75	375	

$X^1 = (0, 0, 5, 305, 70, 450, 8, 0), \quad z(X^1) = 375.$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^1 не является оптимальным. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине (–70), столбец x_2 выбираем в качестве ведущего. Для положительных элементов ведущего столбца находим наименьшее из симплексных отношений $\theta = 8$, x_7 – ведущая строка. Элемент 1 на пересечении ведущего столбца и ведушей строки – ведущий элемент.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следуюшей симплексной таблице (таблица 1.6).

Таблица 1.6 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Реше-ние	θ
x_4	0	14	0	0	1	0	0	– 18	– 23	161	11,5
x_5	0	8	0	0	0	1	0	– 5	– 6	30	3,8
x_6	0	**32**	0	0	0	0	1	– 45	– 54	90	2,8
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8	
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	– 68	0	0	0	0	0	70	75	935	

$X^2 = (0, 8, 5, 161, 30, 90, 8, 5), \quad z(X^2) = 935.$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^2 не является оптимальным.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следуюшей симплексной таблице (таблица 1.7).

Таблица 1.7 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	
x_4	0	0	0	0	1	0	-0.44	1,69	0,63	121,63	71,8
x_5	0	0	0	0	0	1	-0,25	6,25	7,5	7,5	1,2
x_1	68	1	0	0	0	0	0,03	1,41	- 1,69	2,81	
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8	8
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	0	0	0	0	0	2,13	-25,63	- 39,75	1126,25	

$X^3 = (2{,}81; 8; 5; 121{,}63; 7{,}5; 0, 0, 0), \quad z(X^3) = 1126{,}25.$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^3 не является оптимальным.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.8).

Таблица 1.8 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение
x_4	0	0	0	0	1	– 0,08	– 0,42	1,17	0	121
x_8	0	0	0	0	0	0,13	– 0,03	0,83	1	1
x_1	68	1	0	0	0	0,23	– 0,03	0	0	4,5
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8
x_3	75	0	0	1	0	– 0,13	0,03	– 0,83	0	4
z-строка	1	0	0	0	0	5,3	0,8	7,5	0	1166

$X^4 = (4{,}5; 8; 4; 121; 0; 0; 0; 1), \quad z(X^4) = 1166.$

В z-строке среди оценок Δ_j нет отрицательных, следовательно, план X^4 является оптимальным.

$X^* = (4{,}5; 8; 4; 121; 0; 0; 0; 1), \quad z^* = z(X^*) = 1166.$

Вывод. Для получения максимальной прибыли в размере 1166 денежных единиц необходимо добывать и производить балласта 4,5 тыс. м^3 песчаного, 8 тыс. м^3 песчано-гравийного и 4 тыс. м^3 щебеночного.

Задача 2

Постановка задачи. Строящаяся линия разбита на четыре различных по протяженности участка, на которых производятся балластировочные работы. Имеются три балластных карьера, мощность которых достаточна для покрытия общей потребности участков в балласте и составляет соответственно 35, 60, 85 тыс. м^3 балласта. Потребность каждого участка в балласте равна соответственно 75, 20, 55, 30 тыс. м^3. Карьеры и участки линии связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки, и соответственно затраты на перевозку тыс. м^3 балласта c_{ij} ($i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 4}$).

Требуется прикрепить балластные карьеры к участкам линии таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в балласте при минимальных общих затратах на перевозки.

Исходные данные приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	9	6	5	2	$a_1 = 35$
2	11	8	6	7	$a_2 = 60$
3	7	10	4	8	$a_3 = 85$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 75$	$b_2 = 20$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	180 / 180

Суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, что составляет 180 тыс. м^3 (т. е. выполняется условие общего баланса $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$). Следовательно, данная задача является задачей закрытого типа.

Математическую модель транспортной задачи сформулируем следующим образом. Требуется найти план перевозок

$$X = \left\| x_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

при ограничениях:

- на мощности балластных карьеров:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60;$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 85;$$

- на потребности участков строящейся линии в балласте, которые должны быть полностью удовлетворены:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75; \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20;$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55; \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30;$$

условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки,

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,3}; \;\; j = \overline{1,4}$$

и чтобы суммарные затраты на перевозку от поставщиков к потребителям были минимальными:

$$z = 9x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 11x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + \\ + 7x_{24} + 7x_{31} + 10x_{32} + 4x_{33} + 8x_{34} \to \min.$$

Построим начальный базисный план методами северо-западного угла, минимальной стоимости, двойного предпочтения и сравним значения целевой функции для полученных планов.

Построение начального базисного плана ***методом северо-западного угла*** (таблица 2.3). Назначение перевозок начинаем с верхней левой клетки (северо-западного угла). В клетку (1; 1) записываем наименьшее из значений a_1 и b_1 $x_{11} = \min(35, 75) = 35$. Так как запасы первого поставщика полностью исчерпаны, из дальнейшего рассмотрения исключаем первую строку. Вычеркнув строку, корректируем потребности первого потребителя на величину $x_{11} = 35$, $b_1 = 75 - 35 = 40$.

Следующая поставка осуществляется от второго поставщика первому потребителю. В клетку (2; 1) назначаем перевозку $x_{21} = \min(60; 40) = 40$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения первого потребителя. Вычеркнув первый столбец, корректируем запасы второго поставщика $a_2 = 60 - 40 = 20$.

Следующая поставка осуществляется от второго поставщика второму потребителю. В клетку (2; 2) назначаем перевозку $x_{22} = \min(40; 40) = 40$. Исключаем из дальнейшего рассмотрения второго поставщика и второго потребителя. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{33} = \min(85; 55) = 55;$$
$$x_{34} = \min(30; 30) = 30.$$

Таблица 2.3 – **План перевозок, построенный методом северо-западного угла**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	9 35	6	5	2	$a_1 = 35$
2	11 40	8 20	6	7	$a_2 = 60, 20$
3	7	10 0	4 55	8 30	$a_3 = 85, 30$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 75, 40$	$b_2 = 20$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	

Построенный начальный план перевозок является вырожденным, так как число ненулевых перевозок x_{ij} не равно $m + n - 1 = 6$. Для построения базисного плана в клетку (3; 2) введем нулевую перевозку $x_{32} = 0$ так, чтобы не образовывался замкнутый контур из назначенных перевозок.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 9 \cdot 35 + 11 \cdot 40 + 8 \cdot 20 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 55 + 8 \cdot 30 = 1375 \text{ ден. ед.}$$

Построение начального базисного плана ***методом минимальной стоимости*** (таблица 2.4). Назначение перевозок начинаем с клетки (1; 4), имеющей минимальную стоимость перевозки. В клетку (1; 4) записываем наименьшее из значений a_1 и b_4 $x_{14} = \min(35, 30) = 30$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбец. Вычеркнув четвертый столбец, корректируем запасы первого поставщика на величину $x_{14} = 30$, $a_1 = 35 - 30 = 5$.

Следующая поставка осуществляется от третьего поставщика третьему потребителю. В клетку (3; 3) назначаем перевозку $x_{33} = \min(85; 55) = 55$, исключаем из дальнейшего рассмотрения третьего потребителя. Корректируем запасы третьего поставщика $a_3 = 85 - 55 = 30$. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{12} = \min(5; 20) = 5;$$
$$x_{31} = \min(30; 75) = 30;$$
$$x_{22} = \min(60; 15) = 15;$$
$$x_{21} = \min(45; 45) = 45.$$

Таблица 2.4 – **План перевозок, построенный методом минимальной стоимости**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м³
	1	2	3	4	
1	9	6 5	5	2 30	$a_1 = 35, 5$
2	11 45	8 15	6	7	$a_2 = 60, 45$
3	7 30	10	4 55	8	$a_3 = 85, 30$
Спрос потребителей, тыс. м³	$b_1 = 75, 45$	$b_2 = 20, 15$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m + n - 1 = 6$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок:

$$z(X^0) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 11 \cdot 45 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 30 + 4 \cdot 55 = 1135 \text{ ден. ед.}$$

Построение начального базисного плана ***методом двойного предпочтения*** (таблицы 2.4, 2.5).

По каждой строке и каждому столбцу находим разности между двумя наименьшими тарифами перевозки (этап 1). Из этих разностей выделяется наибольшая (равная 5). В четвертом столбце находим клетку (1; 4), имеющую минимальную стоимость перевозки. В клетку (1; 4) записываем наименьшее из значений a_1 и b_4 $x_{14} = \min(35, 30) = 30$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбец. Вычеркнув четвертый столбец, корректируем запасы первого поставщика на величину $x_{14} = 30$, $a_1 = 35 - 30 = 5$.

С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{33} = \min(85; 55) = 55$$
$$x_{12} = \min(5; 20) = 5;$$
$$x_{31} = \min(30; 75) = 30;$$
$$x_{22} = \min(60; 15) = 15;$$
$$x_{21} = \min(45; 45) = 45.$$

Таблица 2.5 – **План перевозок, построенный методом двойного предпочтения**

Поставщики		Потребители				a_i	Этапы				
		1	2	3	4		1	2	3	4	5
1		9	6 5	5	2 30	a_1=35, 5	3	1	**3**	–	–
2		11 45	8 15	6	7	$a_2=60$, 45	1	2	3	3	**3**
3		7 30	10	4 55	8	$a_3=85$, 30	3	**3**	3	3	–
b_j		$b_1=75$, 45	$b_2=20$, 15	$b_3=55$	$b_4=30$						
Этапы	1	2	2	1	**5**						
	2	2	2	1	–						
	3	2	2	–	–						
	4	**4**	2	–	–						
	5	–		–	–						

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m+n-1=6$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 11 \cdot 45 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 30 + 4 \cdot 55 = 1135 \text{ ден. ед.}$$

Сравнивая значения целевых функций для планов, полученных методами северо-западного угла, двойного предпочтения и минимальной стоимости, заметим, что транспортные расходы по плану, построенному методом минимальной стоимости и двойного предпочтения, меньше на 240 ден. ед.

Построение оптимального плана методом потенциалов. С помощью метода потенциалов доведем до оптимального начальный план, построенный методом минимальной стоимости или методом двойного предпочтения (см. таблицу 2.4).

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Если известен u_i, то $v_j = c_{ij} + u_i$, если известен v_j, то $u_i = v_j - c_{ij}$. Положим, например, $u_1 = 0$. Тогда будут вычислены и остальные потенциалы строк и столбцов (таблица 2.6).

Таблица 2.6 – **Начальный план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 9$	$v_2 = 6$	$v_3 = 6$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	9	6 5	5	2 30
$u_2 = -2$	– 11 45	8 15	+ 6	7
$u_3 = 2$	+ 7 30	10	– 4 55	8

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$:

$\Delta_{11} = 9 - 0 - 9 = 0$

$\Delta_{13} = 6 - 0 - 5 = 1$

$\Delta_{23} = 6 - (-2) - 6 = 2$

$\Delta_{24} = 2 - (-2) - 7 = -3$

$\Delta_{32} = 6 - 2 - 10 = -6$

$\Delta_{34} = 2 - 2 - 8 = -8.$

Полученный план неоптимален. Среди оценок Δ_{ij} имеются положительные. Наиболее потенциальной является клетка (2; 3). От клетки (2, 3) строим замкнутый контур: (2; 3), (2; 1), (3; 1), (3; 3). Начиная с клетки (2, 3), разметим вершины контура попеременно знаками плюс «+», минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении.

Из клеток, помеченных знаком «–», выбираем наименьшее значение объема перевозки $\theta = \min(45, 55) = 45$. Сформируем новый улучшенный план перевозок: на 45 увеличим перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшим в клетках, помеченных знаком « – ».

Новый улучшенный план перевозок представлен в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – **Улучшенный методом потенциалов план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	9	6 5	5	2 30
$u_2 = -2$	11	8 15	6 45	7
$u_3 = 0$	7 75	10	4 10	8

Значение целевой функции при улучшенном плане перевозок:

$$z(X^1) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 8 \cdot 15 + 6 \cdot 45 + 7 \cdot 75 + 4 \cdot 10 = 1045 \text{ ден. ед.}$$

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости:

$\Delta_{11} = 7 - 0 - 9 = -2$ $\quad$ $\Delta_{24} = 2 - (-2) - 7 = -3$

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 5 = -1$ $\quad$ $\Delta_{32} = 6 - 0 - 10 = -4$

$\Delta_{21} = 7 - (-2) - 11 = -2$ $\quad$ $\Delta_{34} = 2 - 0 - 8 = -6.$

Среди оценок свободных клеток нет положительных, следовательно, построенный план перевозок является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 45 & 0 \\ 75 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при оптимальном плане $z(X^*) = 1045$ ден. ед.

Вывод. Для того чтобы общие затраты на перевозки были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана X^* (см. таблицу 2.7). В этом случае суммарные затраты будут минимальны и составят 1045 ден. ед.

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 45 & 0 \\ 75 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при оптимальном плане $z(X^*) = 1045$ ден. ед.

Задача 3

Постановка задачи. Для дорог республиканского значения с облегченным покрытием межремонтный срок службы составляет 10 лет. К истекшему сроку ДРСУ (Дорожно-ремонтное строительное управление) запланировало произвести капитальный ремонт автомагистрали. Для этого был объявлен тендер на проведение ремонтных работ, в ходе которого было отобрано 5 строительных организаций-подрядчиков (A_i). Каждая организация дала оценку времени в сутках t_{ij} ($i=\overline{1,5}$; $j=\overline{1,4}$), требующегося ей для выполнения всех работ (B_j): B_1 – уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника), B_2 – ремонт искусственных сооружений, B_3 – укрепление земляного полотна, B_4 – косметический ремонт дорожной одежды. Эти оценки приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – **Выполнение комплекса ремонтных работ организациями**

Организация	Комплекс ремонтных работ			
	Уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника) B_1	Ремонт искусственных сооружений B_2	Укрепление земляного полотна B_3	Косметический ремонт дорожной одежды B_4
	Время выполнения, сут			
A_1	30	70	50	80
A_2	10	20	10	30
A_3	35	35	–	40
A_4	10	18	10	12
A_5	15	20	15	10

Качество выполнения организациями работ одинаковое. Организации, занятые выполнением заказа, потребовали оплату за одни сутки в размере: 1 ден. ед. – первая организация, 3 ден. ед. – вторая, 2 ден. ед. – третья, 5 ден. ед. – четвертая, 4 ден. ед. – пятая. Организация № 3 не выполняет работы, связанные с укреплением земляного полотна. Какая из организаций не получит заказ? Как ДРСУ следует распределить работы между организациями, чтобы минимизировать общие издержки капитального ремонта автомагистрали?

Определим ***тип задачи о назначениях***. Количество исполнителей равно пяти, а количество работ – четырем, следовательно, данная задача является задачей открытого типа. Преобразуем ее к задаче закрытого типа, введем фиктивную работу B_5.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} – назначение i-го исполнителя на j-й вид работ, t_{ij} и c_{ij} – время и стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем соответственно.

Математическая модель задачи примет вид:

найти план назначений $X = \left\| x_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$,

при следующих ограничениях:

- каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1, 5};$$

- каждая работа выполняется только одним исполнителем:

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, 5};$$

условие целочисленности

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \ i, j = \overline{1, 5},$$

где переменные $x_{ij} = 1$, если j-й вид работ выполняется i-м исполнителем, $x_{ij} = 0$ – в остальных случаях,

и чтобы общие издержки капитального ремонта автомагистрали были минимальными:

$$z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min .$$

Стоимость выполнения работ

$c_{ij} = t_{ij} c_{ij}^{'}$, $i, j = \overline{1, 5}$,

где $c_{ij}^{'}$ – стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем в сутки.

Стоимость выполнения фиктивной работы B_5 исполнителями равна нулю, то есть элементы c_{15}, c_{25}, c_{35}, c_{45}, c_{55} матрицы стоимостей равны нулю. Так как исполнитель A_3 не выполняет работу B_3, то элемент c_{33} матрицы стоимостей можно полагать очень большим (M).

Составим матрицу стоимостей выполнения работ:

$$C = \left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 30 & 70 & 50 & 80 & 0 \\ 30 & 60 & 30 & 90 & 0 \\ 70 & 70 & M & 80 & 0 \\ 50 & 90 & 50 & 60 & 0 \\ 60 & 80 & 60 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этап 1 Получение нулей в каждой строке.

Находим минимальный элемент в каждой строке исходной таблицы 3.3.

Таблица 3.3 – **Стоимости выполнения работ**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	min
A_1	30	70	50	80	0	0
A_2	30	60	30	90	0	0
A_3	70	70	M	80	0	0
A_4	50	90	50	60	0	0
A_5	60	80	60	40	0	0

Затем вычитаем минимальные элементы из всех элементов соответствующих строк. Результаты вычислений записываем в таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – **Получение нулей в каждой строке**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	70	50	80	0
A_2	30	60	30	90	0
A_3	70	70	M	80	0
A_4	50	90	50	60	0
A_5	60	80	60	40	0
min	30	60	30	40	0

Этап 2 Получение нулей в каждом столбце.

Находим минимальный элемент в каждом столбце таблицы 3.4. Вычитаем найденный элемент из каждого элемента соответствующего столбца. В результате получаем следующую таблицу 3.5.

Таблица 3.5 – **Получение нулей в каждом столбце**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	0
A_2	0	0	0	50	0
A_3	40	10	$M-30$	40	0
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	0

Этап 3 Проверка решения на оптимальность.

Находим строки, содержащие наименьшее число нулей, – это строка три и четыре, выбираем одну из них, например, четвертую и выделяем один из нулей этой строки и зачеркиваем все остальные нули этой строки и столбца, содержащих выделенный нуль. Следующими строками, содержащими наименьшее число нулей, являются первая и пятая, из которых выбираем одну и выполняем аналогичные операции, и так далее последовательно для всех строк (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – **Проверка решения на оптимальность**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	~~0~~
A_2	~~0~~	0	~~0~~	50	~~0~~
A_3	40	10	$M-30$	40	~~0~~
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	~~0~~

Так как количество выделенных нулей равно 4 (система нулей не является независимой), следовательно, решение не оптимально.

Этап 4 Выполнение I итерации:

а) поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

Помечаем третью строку, которая не имеет ни одного выделенного нуля, затем пятый столбец, который содержит перечеркнутый нуль в этой строке. Далее помечаем четвертую строку, содержащую выделенный нуль в помеченном столбце (таблица 3.7).

Таблица 3.7– **Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	0
A_2	0	0	0	50	0
A_3	40	10	$M-30$	40	0
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	0

Затем выделяем каждую непомеченную строку (первую, вторую и пятую) и каждый помеченный столбец (пятый), в итоге получаем таблицу 3.8.

Таблица 3.8– **Получение минимального набора строк и столбцов, содержащих нули**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	0
A_2	0	0	0	50	0
A_3	40	10	$M-30$	40	0
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	0

б) перестановка некоторых нулей.

Находим наименьший невыделенный элемент, который находится на пересечении третьей строки и второго столбца, равный 10, и вычитаем его из остальных невыделенных элементов и прибавляем к элементам, стоящим на пересечении выделенных строк (первая, вторая и пятая) и столбцов (пятый). В результате получаем следующую таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	50	10
A_2	0	0	0	60	10
A_3	30	0	$M-40$	30	0
A_4	10	20	10	10	0
A_5	30	20	30	0	10

Этап 3. Проверка решения на оптимальность:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	50	10
A_2	0	0	0	60	10
A_3	30	0	$M-40$	30	0
A_4	10	20	10	10	0
A_5	30	20	30	0	10

Получена система независимых нулей (количество выделенных нулей равно 5). В результате выполнения одной итерации получено оптимальное решение.

Следовательно, оптимальный план $X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Значение целевой функции при оптимальном плане

$$z^* = z(X^*) = 30 \cdot 1 + 70 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 30 \cdot 1 +$$

$$+90 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 70 \cdot 1 + (M - 40) \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 90 \cdot 0 + 50 \cdot 0 +$$

$$+60 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 60 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 40 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 30 + 30 + 70 + 40 = 170 \text{ ден. ед.}$$

Вывод. Для того чтобы общие издержки капитального ремонта ДРСУ автомагистрали были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана назначений: первая организация выполняет уборку полосы отвода, вторая – укрепление земляного полотна, третья – ремонт искусственных сооружений, пятая – косметический ремонт дорожной одежды. Четвертой организации будет отказано ДРСУ в выполнении заказа на проведение ремонтных работ. В этом случае общие издержки будут минимальны и составят 170 ден. ед.

Задание 4

В общем виде задачи оптимального распределения ресурсов могут быть описаны следующим образом. Имеется некоторое количество ресурсов (материальные, трудовые, финансовые), которые необходимо распределить между различными объектами их использования по отдельным промежуткам планового периода так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Показателем эффективности может служить, например, прибыль, себестоимость, суммарные затраты и т.д.

Пусть C – объем ресурсов, которые необходимо распределить между различными объектами, причем эффективность работы каждого объекта оценивается с помощью функции $f_i(x_i)$, где x_i – количество ресурсов, выделяемых i-му объекту.

Обозначив суммарную эффективность z, получаем следующую задачу нелинейного программирования

Максимизировать

$$z = f_1(x_1) + f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$$

при условии, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C, \; x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0, \; x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ – целые.}$$

Элементы модели динамического программирования таковы.

1. *Этап i* ставится в соответствие i-му объекту, $i = 1,2,..., n$.
2. *Вариантами решения* на i-м этапе описываются количеством x_i выделенных ресурсов i-му объекту.
3. *Состояние* на i-м этапе S_i выражает оставшиеся ресурсы.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{x_k}\left\{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k)\right\} = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}}\left\{f_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\right\},$$

где $Z_{n+1}(S_n)=0$.

Между четырьмя предприятиями распределяются 60 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x. Значения прироста задаются в виде таблицы $g_i(x)$, i = 1, 2, 3, 4. Найти такой план распределения 60 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Начальное состояние S_0 = 60 млн. руб. Разобьем весь процесс выделения средств предприятиям на 4 шага.

На 1-м шаге выделим x_1 млн. руб. 1-му предприятию. После этого останется $S_1 = S_0 - x_1$ млн. руб.

На 2-м шаге выделим x_2 млн. руб. 2-му предприятию. После этого останется $S_2 = S_1 - x_2$ млн. руб.

На 3-м шаге выделим x_3 млн. руб. 3-му предприятию. После этого останется $S_3 = S_2 - x_3$ млн. руб.

На 4-м шаге выделим x_4 млн. руб. 4-му предприятию.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{x_k}\left\{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k)\right\} = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}}\left\{g_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\right\},$$

то есть на k-м шаге из оставшихся S_{k-1} средств надо выделить x_k средств k-му предприятию, чтобы прирост выпуска продукции на k-м и оставшихся предприятиях был максимальным.

Пусть k = 4. Тогда

$$Z_4(S_3) = \max_{0 \le x_4 \le S_3}\left\{g_4(x_4)\right\}.$$

Заполним таблицу.

В столбце S_3 и строке x_4 указаны все возможные значения. Все оставшиеся перед 4-м шагом средства нужно выделить 4-му предприятию.

Поэтому числа из столбца $g_4(x)$ исходной таблицы запишем в нашу таблицу в столбцы со 2-го по 5-й. В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Те x_4, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

1	2	3	4	5	6	7
$S_3 \backslash x_4$	0	20	40	60	$Z_4(S_3)$	x_4^*
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

Пусть $k = 3$. Тогда

$$Z_3(S_2) = \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{g_3(x_3) + Z_4(S_2 - x_3)\}.$$

Определим оптимальную стратегию при распределении средств между 3-м и 4-м предприятиями. По первоначальной таблице и таблице при $k = 4$ заполним следующую таблицу.

В 1-м столбце указано, сколько средств осталось для 3-го и 4-го предприятий. В строке x_3 дана информация о том, сколько из этих оставшихся средств досталось 3-му предприятию. Поясним, как заполняются столбцы со 2-го по 5-й. В клетке (2, 2) (2-я строка, 2-й столбец) на долю 3-го и 4-го предприятий приходится $S_2 = 0$, из них на долю 3-го предприятия приходится $x_3 = 0$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_3(x)$ при x=0 (это 0) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_3 = S_2 - x_3 = 0 - 0 = 0$ (это 0), то есть 0 + 0 = 0.

В клетке (3, 2) (3-я строка, 2-й столбец) на долю 3-го и 4-го предприятий приходится $S_2 = 20$, из них на долю 3-го предприятия приходится $x_3 = 0$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_3(x)$ при $x = 0$ (это 0) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_3 = S_2 - x_3 = 20 - 0 = 20$ (это 14), то есть 0 + 14 = 14.

В клетке (5, 3) (5-я строка, 3-й столбец) на долю 3-го и 4-го предприятий приходится $S_2 = 60$, из них на долю 3-го предприятия приходится $x_3 = 20$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_3(x)$ при $x = 20$ (это 14) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_3 = S_2 - x_3 = 60 - 20 = 40$ (это 20), то есть 14 + 20 = 34. И т. д.

	1	2	3	4	5	6	7
1	$S_2 \backslash x_3$	0	20	40	60	$Z_3(S_2)$	x_3^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	14+0=14			14	0 или 20
4	40	0+20=20	14+14=28	21+0=21		28	20
5	60	0+35=35	14+20=34	21+14=35	34+0=34	35	0 или 40

В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Те x_3, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Пусть $k = 2$. Тогда

$$Z_2(S_1) = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{g_2(x_2) + Z_3(S_1 - x_2)\}.$$

Определим оптимальную стратегию при распределении средств между 2-м, 3-м и 4-м предприятиями. По первоначальной таблице и таблице при $k = 3$ заполним следующую таблицу.

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_1 \ x_2	0	20	40	60	$Z_2(S_1)$	x_2^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	6+0=6			14	0
4	40	0+28=28	6+14=20	23+0=23		28	0
5	60	0+35=35	6+28=34	23+14=37	30+0=30	37	40

В 1-м столбце указано, сколько средств осталось для 2-го, 3-го и 4-го предприятий. В строке x_2 дана информация о том, сколько из этих оставшихся средств досталось 2-му предприятию. Поясним, как заполняются столбцы со 2-го по 5-й.

Например, в клетке (5, 4) (5-я строка, 4-й столбец) на долю 2-го, 3-го и 4-го предприятий приходится $S_1 = 60$, из них на долю 2-го предприятия приходится $x_2 = 40$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_2(x)$ при $x = 40$ (это 23) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_2 = S_1 - x_2 = 60 - 40 = 20$ (это 14), то есть $23 + 14 = 37$. И т. д.

В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Те x_2, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Пусть $k = 1$. Тогда

$$Z_1(S_0) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{g_1(x_1) + Z_2(S_0 - x_1)\}.$$

Определим оптимальную стратегию при распределении средств между предприятиями. По первоначальной таблице и таблице при $k = 2$ заполним следующую таблицу.

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_0 \ x_1	0	20	40	60	$Z_1(S_0)$	x_1^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	7+0=7			14	0
4	40	0+28=28	7+14=21	23+0=23		28	0

5	60	0+37=37	7+28=35	23+14=37	31+0=31	37	0 или 40

В 1-м столбце указано общее количество средств. В строке x_1 дана информация о том, сколько из этих средств досталось 1-му предприятию. Поясним, как заполняются столбцы со 2-го по 5-й.

Например, в клетке (4, 3) (4-я строка, 3-й столбец) на долю предприятий приходится $S_0 = 40$, из них на долю 1-го предприятия приходится $x_1 = 20$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_1(x)$ при $x = 20$ (это 7) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_1 = S_0 - x_1 = 40 - 20 = 20$ (это 14), то есть $7 + 14 = 21$. И т. д.

В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке и результат пишем в 6-й столбец. Те x_1, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Максимальное значение $Z_1(S_0)$ (в 6-м столбце) равно 37 при $S_0 = 60$ и $x_1^* = 0$ или 40. Если $x_1^* = 0$, то $S_1 = S_0 - x_1^* = 60 - 0 = 60$.

Из таблицы при $k = 2$ и $S_1 = 60$ находим в последнем столбце $x_2^* = 40$. Тогда $S_2 = S_1 - x_2^* = 60 - 40 = 20$.

Из таблицы при $k = 3$ и $S_2 = 20$ находим в последнем столбце $x_3^* = 0$ или 20. Если $x_3^* = 0$, то $S_3 = S_2 - x_3^* = 20 - 0 = 20$.

Из таблицы при $k = 4$ и $S_3 = 20$ находим в последнем столбце $x_4^* = 20$.

Получен один оптимальный вариант распределения средств: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 20$.

Если $x_3^* = 20$, то $S_3 = S_2 - x_3^* = 20 - 20 = 0$. Из таблицы при $k = 4$ и $S_3=0$ находим в последнем столбце $x_4^* = 0$.

Получен еще один оптимальный вариант распределения средств: $x_1^*=0$, $x_2^*=40$, $x_3^*=20$, $x_4^*=0$.

Если $x_1^* = 40$, то $S_1 = S_0 - x_1^* = 60 - 40 = 20$. Из таблицы при $k = 2$ и $S_1=20$ находим в последнем столбце $x_2^* = 0$. Тогда $S_2 = S_1 - x_2^* = 20 - 0 = 20$. Действия при $S_2 = 20$ рассмотрены выше.

Получаем еще два оптимальных варианта распределения средств: $x_1^*=40$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 20$ и $x_1^* = 40$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 20$, $x_4^* = 0$.

Для наглядности сведем оптимальные решения в таблицу.

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
0	40	0	20
0	40	20	0
40	0	0	20
40	0	20	0

Общий прирост выпуска продукции в каждом из вариантов равен 37 млн. руб.

Реализация в Excel

Этапы выполнения:

1. В ячейках A3:E8 вводим исходные данные (см. рис. 5.1)

	A	B	C	D	E
1	**Исходные данные**				
2					
3	Средства x, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
4		$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
5	0	0	0	0	0
6	20	7	6	14	14
7	40	23	23	21	20
8	60	31	30	34	35
9					

Рис. 5.1. Исходные данные

2. Заполним таблицу этапа 4. Для этого введем формулы:

Ячейка	Формула	Примечание
C12	=E5	
D13	=E6	
E14	=E7	
F15	=E8	
G12	=МАКС(C12:F12)	Копируем в диапазон G12:G15

В ячейках H12:H15 записываем те значения x, которым соответствуют значения столбца G12:G15. Результаты этапа 4 представлены на рис. 5.2.

B	C	D	E	F	G	H
Этап 4	0	20	40	60	$z_4(s_3)$	x_4^*
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

Рис. 5.2. Этап 4

3. Заполним таблицу этапа 3. Для этого введем формулы:

Ячейка	Формула	Примечание
L12	=$D$5	Копируем в диапазон L12:L15
N12	=G12	Копируем в диапазон N12:N15
P12	=L12+N12	Копируем в диапазон P12:P15
Q13	=$D$6	Копируем в диапазон Q13:P15
S13	=G12	Копируем в диапазон S13:S15
U13	=Q13+S13	Копируем в диапазон U13:U15
V14	=$D$7	Копируем в диапазон V14:U15
X14	=G12	Копируем в диапазон X14:X15
Z14	=V14+X14	Копируем в диапазон Z14:Z15
AA15	=$D$8	
AC15	=G12	

AE15	=AA15+AC15	
AF12	=МАКС(P12;U12;Z12;AE12)	Копируем в диапазон AF12:AF15

В столбце AG12:AG15 записываем те значения x, которым соответствуют значения столбца AF12:AF15. Результаты этапа 3 представлены на рис. 5.3.

Этап 3	0	20	40	60	$z_3(s_2)$	x_3^*
0	0 + 0 = **0**				0	0
20	0 + 14 = **14**	14 + 0 = **14**			14	0 или 20
40	0 + 20 = **20**	14 + 14 = **28**	21 + 0 = **21**		28	20
60	0 + 35 = **35**	14 + 20 = **34**	21 + 14 = **35**	34 + 0 = **34**	35	0

Рис. 5.3. Этап 3.

4. Аналогично п.3. строим таблицы для этапа 2 и этапа 1. Результаты представлены на рис. 5.4.

Этап 2	0	20	40	60	$z_2(s_1)$	x_2^*
0	0 + 0 = **0**				0	0
20	0 + 14 = **14**	6 + 0 = **6**			14	0
40	0 + 28 = **28**	6 + 14 = **20**	23 + 0 = **23**		28	0
60	0 + 35 = **35**	6 + 28 = **34**	23 + 14 = **37**	30 + 0 = **30**	37	40

Этап 1	0	20	40	60	$z_1(s_0)$	x_1^*
0	0 + 0 = **0**				0	0
20	0 + 14 = **14**	7 + 0 = **7**			14	0
40	0 + 28 = **28**	7 + 14 = **21**	23 + 0 = **23**		28	0
60	0 + 37 = **37**	7 + 28 = **35**	23 + 14 = **37**	31 + 0 = **31**	37	0 или 40

Рис. 5.4. Этапы 2 и 1.

Из таблицы этапа 1 максимальное значение $z_1(s_0)$ равно 37 при x_1*= 0 или 40.

Если x_1*= 0, то $s_1=s_0 - x_1$*= 60 – 0 = 60.

Из таблицы этапа 2 при s_1=60 находим в последнем столбце x_2*=40. Тогда $s_2=s_1 - x_2$*= 60 – 40 = 20.

Из таблицы этапа 3 при s_2=20 находим в последнем столбце x_3*=0 или 20.

Если x_3*= 0, то $s_3=s_2 - x_3$*= 20 – 0 = 20.

Из таблицы этапа 4 при s_3=20 находим в последнем столбце x_4*=20. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (0;40;0;20).

Если x_3*= 20, то $s_3=s_2 - x_3$*= 20 – 20 = 0.

Из таблицы этапа 4 при s_3=0 находим в последнем столбце x_4*=0. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (0;40;20;0).

Если x_1*= 40, то $s_1=s_0 - x_1$*= 60 – 40 = 20.

Из таблицы этапа 2 при s_1=20 находим в последнем столбце x_2*=0. Тогда $s_2=s_1 - x_2$*= 20 – 0 = 20.

Из таблицы этапа 3 при s_2=20 находим в последнем столбце x_3*=0 или 20.

Если x_3*= 0, то $s_3=s_2 - x_3^* = 20 - 0 = 20$.

Из таблицы этапа 4 при s_3=20 находим в последнем столбце x_4*=20. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (40;0;0;20).

Если x_3*= 20, то $s_3=s_2 - x_3^* = 20 - 20 = 0$.

Из таблицы этапа 4 при s_3=0 находим в последнем столбце x_4*=0. Тогда получен один оптимальный вариант распределения средств (40;0;20;0).