Моделирование показателей надежности технических систем с использованием аппарата Марковских случайных процессов.

Цель работы - научиться находить показатели надежности системы с использованием аппарата Марковских случайных процессов.

Пример выполнения работы

Надежность как качественная характеристика всегда принималась во внимание при решении различных вопросов эксплуатации и технического обслуживания. Количественное определение надежности появилось с возникновением теории надежности. Математической платформой теории надежности являются теория вероятностей и математическая статистика. В качестве основной количественной меры надежности технических систем принята вероятность безотказной работы.

Вероятность безотказной работы – это вероятность того, что за определенное время работы системы и в заданных условиях эксплуатации отказа не происходит.

Для моделирования вероятности безотказной работы автотранспортного предприятия (коэффициента выпуска автомобилей) воспользуемся аппаратом Марковских дискретных случайных процессов с непрерывным временем. Представим автомобиль как некоторую систему S с дискретными состояниями S_1, S_2, …, S_n, которая переходит из состояния в состояние под влиянием случайных событий (отказов).

На стадии прогнозирования работы автомобиля целесообразно рассматривать следующие состояния, в которых подвижной состав может находиться в процессе эксплуатации и которые характеризуются целодневными простоями: S_0 – исправен, работает; S_1 – находится на капитальном ремонте (КР); S_2 – проходит ТО-2; S_3 – находится на текущем ремонте (ТР); S_4 – исправен, не работает по организационным причинам (без водителя, шин, запасных частей); S_5 – не работает, снятие агрегата для отправки на капитальный ремонт; S_6 – не работает, списание агрегата, замена на новый; S_7 – исправен, не работает (выходные и праздничные дни); S_8 – списывается.

Рассматриваемые состояния S_j автомобиля характеризуются средним числом дней пребывания автомобиля в каждом j-ом состоянии (j=1,2,…,n) $Д_j$. Отношение

$$P_j = \frac{Д_j}{Д_k},$$

где $Д_к$ – число календарных дней в году, есть вероятность нахождения автомобиля в j-ом состоянии.

Вероятности P_j являются функциями пробега автомобиля $P_j(L)$.

Вероятность нахождения автомобиля в состоянии S_1 («исправен, работает») $P_1(L)$ представляет собой коэффициент выпуска автомобиля – один из основных показателей работы автопредприятия.

Возможные переходы автомобиля из состояния S_i в состояние S_j, описаны матрицей переходов.

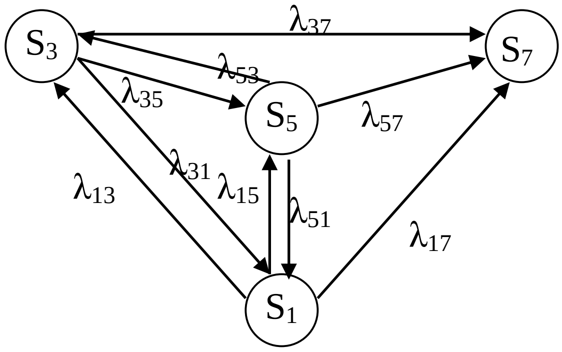
$$p_{ij} = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 \end{array} \end{array}$$

Соответствующие интенсивности потоков событий λ_{ij}, переводящих автомобиль из состояния S_i в состояние S_j, определяются по формулам, приведенным в таблице:

Состояние	Интенсивность	Примечание
проходит техническое обслуживание	$\lambda_{12}(L) = \dfrac{1}{L_{mo}}$	L_{mo} – пробег автомобиля до ТО-2, тыс.км.
находится в текущем ремонте	$\lambda_{13}(L) = \exp(-0{,}8 + 0{,}08L)$	
находится в капитальном ремонте	$\lambda_{14}(L) = \exp(-0{,}3 + 0{,}002L)$	
проводится замена агрегата	$\lambda_{15}(L) = \exp(-0{,}4 + 0{,}004L)$	
исправен, не работает по организационным причинам	$\lambda_{16}(L) = \dfrac{1}{l_{cc} T_{орг}}$	l_{cc} – среднесуточный пробег, тыс. км; $T_{орг}$ – дни простоя по организационным причинам.
исправен, не работает, выходные и праздничные дни	$\lambda_{17}(L) = \dfrac{1}{l_{cc} T_{вых}}$	$T_{вых}$ – праздничные и выходные дни
списывается	$\lambda_{18}(L) = \dfrac{L - L_0}{S}$	L_0 – 400 тыс. км; S – 300 тыс. км.

Для приведения всех интенсивностей перехода λ_{ij} к единым единицам измерения 1/день(сутки) интенсивности перехода из 1-го состояния (автомобиль исправен) во все j-е состояния λ_{ij} при составлении дифференциальных уравнений умножаются на коэффициент l_{cc} (среднесуточный пробег).

Для анализа процесса эксплуатации автомобиля как случайного процесса с дискретными состояниями воспользуемся графом состояний



Определим интенсивности потоков событий λ_{ij}, переводящих автомобиль из состояния S_i в состояние S_j.

Исходные данные:

среднесуточный пробег – l_{cc}=0,25 тыс. км;

среднее время простоя автомобиля в текущем ремонте – T_3=1 день;

Остальные данные выбираются, исходя из профессиональных соображений:

праздничные и выходные дни – $T_{вых}$=60 дней;

среднее время замены агрегата – T_5=5 дней;

$$\lambda_{13} = exp(-0{,}8 + 0{,}08L);$$

$$\lambda_{15} = exp(-0{,}4 + 0{,}004L);$$

$$\lambda_{17} = \frac{1}{l_{cc}T_{вых}} = \frac{1}{0{,}25 \cdot 60} = 0{,}0667;$$

$$\lambda_{31} = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\lambda_{35} = 0{,}1;$$

$$\lambda_{37} = 0{,}01;$$

$$\lambda_{51} = \frac{1}{T_5} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$\lambda_{53} = 0{,}02;$$

$$\lambda_{57} = 0{,}002.$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний P_i, где i=1, 3, 5, 7:

$$\frac{dP_1}{dL} = -P_1(\lambda_{13} + \lambda_{15} + \lambda_{17})l_{cc} + \lambda_{31}P_3 + \lambda_{51}P_5;$$

$$\frac{dP_3}{dL} = -P_3(\lambda_{31} + \lambda_{35} + \lambda_{37}) + \lambda_{13}P_1 l_{cc} + \lambda_{53}P_5;$$

$$\frac{dP_5}{dL} = -P_5(\lambda_{51} + \lambda_{53} + \lambda_{57}) + \lambda_{15}P_1 l_{cc} + \lambda_{35}P_3;$$

$$\frac{dP_7}{dL} = \lambda_{17} P_1 l_{cc} + \lambda_{37} P_3 + \lambda_{57} P_5.$$

Решим эту систему методом Рунге-Кутта в Python (https://trinket.io/features/python3) при следующих условиях:

а) пределы интегрирования: нижний – 0, верхний – 35;

б) шаг интегрирования – 0,5;

в) начальные условия: $P_1(L)$=1, $P_3(L)$= $P_5(L)$= $P_7(L)$=0;

г) получим результаты в точках 1,5,10,15,20,25,30 с точностью ε=10^{-3}.

Запишем систему в виде:

$$f_1(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_1}{dL} = -P_1(\lambda_{13} + \lambda_{15} + \lambda_{17}) l_{cc} + \lambda_{31} P_3 + \lambda_{51} P_5;$$

$$f_3(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_3}{dL} = -P_3(\lambda_{31} + \lambda_{35} + \lambda_{37}) + \lambda_{13} P_1 l_{cc} + \lambda_{53} P_5;$$

$$f_5(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_5}{dL} = -P_5(\lambda_{51} + \lambda_{53} + \lambda_{57}) + \lambda_{15} P_1 l_{cc} + \lambda_{35} P_3;$$

$$f_7(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_7}{dL} = \lambda_{17} P_1 l_{cc} + \lambda_{37} P_3 + \lambda_{57} P_5.$$

Код программы:

main.py | inflammation-01.csv

```
import numpy as np
from scipy. integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math
 # create function
def f(y, t):
  y1, y2 , y3, y4 = y
  return [-y1*(math.exp(-0.8+0.08*t)+math.exp(-0.4+0.004*t)+0.0667)*0.25+1*y2+0.2*y3,
  -y2*(1+0.1+0.01)+y1*0.25*math.exp(-0.8+0.08*t)+0.02*y3,
  -y3*(0.2+0.02+0.002)+math.exp(-0.4+0.004*t)*y1*0.25+0.1*y2,
  0.0667*y1*0.25+0.01*y2+0.002*y3]

t = np.linspace( 1, 30, 15) # vector of time
y0 = [1,0,0,0] # start value
w = odeint(f, y0, t) # solve eq.
y1 = w[:,0]
y2 = w[:,1]
y3 = w[:,2]
y4 = w[:,3]
fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(t, y1, '-o',t, y2, '-o',t, y3, '-o',t, y4, '-o', linewidth=1)
plt.ylabel("p")
plt.xlabel("t")
plt.grid(True)
plt.show() # display
```

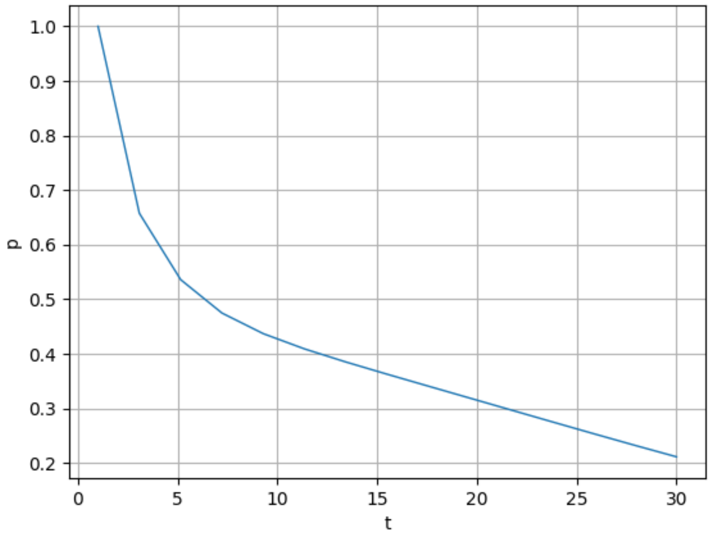


Рис. 1.2. График зависимости коэффициента выпуска от пробега

Получим результаты в точках 1,5,10,15,20,25,30 с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ (таблица 1.1).

Таблица 1.1.

L	$P_1(L)$	$P_3(L)$	$P_5(L)$	$P_7(L)$
1	0,787	0,0622	0,136	0,0152
5	0,512	0,0824	0,345	0,0614
10	0,419	0,0972	0,376	0,108
15	0,364	0,123	0,363	0,15
20	0,312	0,156	0,344	0,188
25	0,260	0,193	0,323	0,224
30	0,209	0,232	0,302	0,257

Порядок выполнения работы

В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний:

S_1 – ЭВМ полностью исправна;

S_2 – ЭВМ имеет незначительные неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи;

S_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач;

S_4 – ЭВМ полностью вышла из строя;

S_5 – ЭВМ находится на профилактике;

S_6 – ЭВМ не работает по организационным причинам;

S_7 – ЭВМ не работает, выходные и праздничные дни;

S_8 – ЭВМ списывается.

Рассматриваемые состояния S_j ЭВМ характеризуются средним числом дней пребывания ЭВМ в каждом j-ом состоянии (j=1,2,…,8) $Д_j$. Отношение

$$P_j = \frac{Д_j}{Д},$$

где $Д$ – возможное время работы ЭВМ в данный период (месяц, квартал, год и т.д.), можно трактовать как вероятность нахождения ЭВМ в j-ом состоянии.

Вероятности P_j являются функциями времени $P_j(t)$.

Вероятность нахождения ЭВМ в состоянии $P(t)=P_1(t)+P_2(t)$ может быть истолкована как вероятность безотказной работы ЭВМ, т.е. как один из показателей надежности технической системы.

Возможные переходы системы S-ЭВМ из состояния S_i в состояние S_j, описаны матрицей переходов.

Соответствующие интенсивности потоков событий λ_{ij}, переводящих ЭВМ из состояния S_i в состояние S_j, определяются по формулам, приведенным в таблице:

Интенсивность	Примечание
$\lambda_{12}(t) = \frac{0,25}{T_н}$	$T_н$ – среднее время работы ЭВМ до появления незначительной неисправности; $T_н = 0,1 \cdot T$, где T – общее возможное время работы ЭВМ за данный период
$\lambda_{13}(t) = 0,25\exp(-0,8 + 0,08t)$	
$\lambda_{14}(t) = 0,22\exp(-0,3 + 0,002t)$	
$\lambda_{15}(t) = 0,24\exp(-0,4 + 0,004t)$	
$\lambda_{16}(t) = \frac{1}{T_{орг}}$	$T_{орг}$ – среднее время простоя ЭВМ по организационным причинам.
$\lambda_{17}(t) = \frac{1}{T_{вых}}$	$T_{вых}$ – среднее время простоя в праздничные и выходные дни.
$\lambda_{18}(t) = \frac{t - t_0}{S}$	t_0 = 1200 тыс. ч; S = 72000 тыс. ч. $\lambda_{18}(t) = 0$ при $t \le 1200$ тыс. ч.

Требуется:

1. Построить размеченный граф состояний системы S-ЭВМ по заданной матрице переходов.

2. Определить интенсивности λ_{ij}, используя формулы из таблицы.

Остальные интенсивности определяются по формулам

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{T_i},$$

где T_i – среднее время пребывания в i-м состоянии за данный период.

3. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и решить ее методом Рунге-Кутта при следующих условиях:

а) пределы интегрирования: нижний – 0, верхний – 50;

б) шаг интегрирования – 0,5;

в) начальные условия: $P_1(t)=1$, $P_j(t)=0$, $(j=2,3,\ldots,n)$;

г) получить результаты в точках 1,5,10,15,…,50 с точностью $E=10^{-3}$.

4. Получить значения вероятности безотказной работы ЭВМ $P(t)$ и построить график зависимости вероятности от времени t.

Варианты заданий

Матрицы возможных переходов:

1 вариант

	1	2	3	4	8
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0

2 вариант

	1	2	3	4	7
1	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	0

3 вариант

	1	2	3	4	8
1	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0

4 вариант

	1	2	3	5	6
1	0	1	1	1	1
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	1	1
5	1	1	0	0	1
6	1	1	1	1	0

5 вариант

	1	2	4	7	8
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	0
4	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0

6 вариант

	1	2	5	6	8
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	0
5	1	1	0	1	0
6	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0

7 вариант

	1	3	5	6	7
1	0	1	1	1	1
3	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	1
6	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	0

8 вариант

	1	2	3	5	8
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0
5	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0

9 вариант

	1	2	5	7	8
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
5	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0

10 вариант

	1	2	5	6	7
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
5	1	1	0	1	1
6	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	0

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. размеченный граф состояний системы по заданной матрице переходов;
2. Интенсивности потоков событий λ_{ij}, переводящих ЭВМ из состояния S_i в состояние S_j;
3. систему дифференциальных уравнений Колмогорова;
4. решение системы в python;
5. значения вероятности $P(t)$ безотказной работы ЭВМ;
6. график зависимости вероятности $P(t)$ безотказной работы ЭВМ от времени.

Контрольные вопросы

1. Основные понятия Марковских случайных процессов: случайная функция; случайный процесс; Марковские процессы; виды Марковских процессов; граф состояний.
2. Марковская цепь: вероятности состояний; начальное распределение; вероятность перехода; установившийся режим; однородная цепь.
3. Непрерывная цепь Маркова: плотность вероятностей; однородные и неоднородные процессы; размеченный граф состояний.
4. Поток событий; интенсивность потока; пуассоновский поток; простейший поток; свойства простейшего потока: стационарность, ординарность, отсутствие последствий; нестационарный пуассоновский поток.
5. Процесс гибели и размножения: понятие процесса; процесс чистой гибели, процесс чистого размножения; нахождение предельных вероятностей.
6. Уравнения Колмогорова: вид системы; поток вероятности перехода; правила составления уравнений по графу состояний и по матрице плотностей вероятностей.
7. Предельные вероятности состояний: понятие; стационарный режим; предельная вероятность; правило составления системы дифференциальных уравнений для нахождения предельных вероятностей.