Разработка моделей исследования операций

Цель работы - ознакомиться с основами построения моделей исследования операций.

Порядок выполнения работы

Составить математические модели задач по плану:

1. Исходные данные с указанием единиц измерения.
2. Искомые данные с указанием единиц измерения.
3. Ограничения с описанием.
4. Целевая функция с описанием и указанием единиц измерения.

Пример выполнения работы

Задача 1.

Постановка задачи: Между четырьмя предприятиями распределяются 60 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x. Значения прироста задаются в виде таблицы $g_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Найти такой план распределения 60 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Построим математическую модель задачи.

Пусть C – объем ресурсов, которые необходимо распределить между различными объектами, причем эффективность работы каждого объекта оценивается с помощью функции $f_i(x_i)$, где x_i – количество ресурсов, выделяемых i-му объекту.

Обозначив суммарную эффективность z, получаем следующую задачу нелинейного программирования

Максимизировать

$$z=f_1(x_1)+ f_2(x_2)+ f_3(x_3)+ f_4(x_4)$$

при условии, что

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{целые.}$$

Элементы модели:

1. *Этап* i ставится в соответствие i-му объекту, $i = 1,2,3,4$.
2. *Вариантами решения* на i-м этапе описываются количеством x_i выделенных ресурсов i-му объекту.
3. *Состояние* на i-м этапе S_i выражает оставшиеся ресурсы.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{x_k}\left\{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k)\right\} = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}}\left\{f_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\right\},$$

где $Z_{n+1}(S_n)=0$, то есть на k-м шаге из оставшихся S_{k-1} средств надо выделить x_k средств k-му предприятию, чтобы прирост выпуска продукции на k-м и оставшихся предприятиях был максимальным.

Этапы:

Начальное состояние S_0 = 60 млн. руб. Разобьем весь процесс выделения средств предприятиям на 4 шага.

На 1-м шаге выделим x_1 млн. руб. 1-му предприятию. После этого останется $S_1 = S_0 – x_1$ млн. руб.

На 2-м шаге выделим x_2 млн. руб. 2-му предприятию. После этого останется $S_2 = S_1 – x_2$ млн. руб.

На 3-м шаге выделим x_3 млн. руб. 3-му предприятию. После этого останется $S_3 = S_2 – x_3$ млн. руб.

На 4-м шаге выделим x_4 млн. руб. 4-му предприятию.

Задача 2.

Постановка задачи: Для дорог республиканского значения с облегченным покрытием межремонтный срок службы составляет 10 лет. К истекшему сроку ДРСУ (Дорожно-ремонтное строительное управление) запланировало произвести капитальный ремонт автомагистрали. Для этого был объявлен тендер на проведение ремонтных работ, в ходе которого было отобрано 5 строительных организаций-подрядчиков (A_i). Каждая организация дала оценку времени в сутках t_{ij} ($i = \overline{1,5}$; $j = \overline{1,4}$), требующегося ей для выполнения всех работ (B_j): B_1 – уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника), B_2 – ремонт искусственных сооружений, B_3 – укрепление земляного полотна, B_4 – косметический ремонт дорожной одежды.

Качество выполнения организациями работ одинаковое. Организации, занятые выполнением заказа, потребовали оплату за одни сутки в размере z_{ij}. Организация № 3 не выполняет работы, связанные с укреплением земляного полотна. Какая из организаций не получит заказ? Как ДРСУ следует распределить работы между организациями, чтобы минимизировать общие издержки капитального ремонта автомагистрали?

Построим математическую модель задачи.

Исходные параметры модели задачи о назначениях

1. n – количество ресурсов, m – количество работ.
2. c_{ij} – стоимость выполнения j-ой работы i-ой организацией [руб.].

$$c_{ij} = t_{ij}\, z_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

Искомые параметры

1. x_{ij} – факт назначения или неназначения i-ой организации на j-ую работу:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } i\text{-й ресурс не назначен на } j\text{-ю работу},\\ 1, \text{если } i\text{-й ресурс назначен на } j\text{-ю работу}.\end{cases}$$

2. $L(X)$ – общие издержки капитального ремонта автомагистрали [руб.].

Ограничения

- каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n};$

- каждая работа выполняется только одним исполнителем:

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,m};$

- условие целочисленности

$x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$, где переменные $x_{ij} = 1$, если j-й вид работ выполняется i-м исполнителем, $x_{ij} = 0$ – в остальных случаях.

Модель задачи о назначениях

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ \left(i = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,m}\right), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \qquad 1)$$

Дополнительные условия:

Количество исполнителей равно 5.

Количество работ равно 4.

Следовательно, данная задача является задачей открытого типа

Преобразуем ее к задаче закрытого типа, введем фиктивную работу B_5.

Задача 3.

Постановка задачи: «Жилище для человечества» – прекрасная благотворительная организация, которая строит дома для бедствующих семей силами добровольцев. Такая семья может выбрать себе дом из трех типоразмеров: 1000, 1100 и 1200 квадратных футов. Дом каждого типоразмера требует выполнения определенного объема работ силами добровольцев. Филиал организации в городе Файтвилл получил пять заявок на предстоящие шесть месяцев. Комитет по надзору дает оценку каждой заявке в численном виде, принимая во внимание различные факторы. Более высокая оценка означает более острую потребность в жилье. В течение предстоящих шести месяцев филиал организации в этом городе может привлечь к работе максимум 23 добровольца. Следующая таблица содержит оценку каждой заявки и необходимое число добровольцев для ее выполнения. Какие заявки следует утвердить комитету?

Заявка	Размер дома (футов кв.)	Оценка	Необходимое число добровольцев
1	1200	78	7
2	1000	64	4
3	1100	68	6
4	1000	62	5
5	1200	85	8

Данная задача является задачей о загрузке.

Построим математическую модель задачи.

Максимизировать

$$z = 78x_1 + 64x_2 + 68x_3 + 62x_4 + 85x_5$$

при условии, что

$$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 \le 23,$$

$$x_1, x_2, ..., x_5 \ge 0, \; x_i \in \{0,1\}.$$

Три элемента модели динамического программирования определяется следующим образом.

1. *Этап* i ставится в соответствие i-ой заявке, i=1,2,..., 5.

2. *Варианты решения* на этапе i описываются количеством x_i i-ых заявок, x_i может принимать значения $\{0,1\}$. Соответствующая общая оценка равна равна $r_i x_i$.

3. *Состояние* x_i, на этапе i выражает переменная y_i, отвечающая за количество добровольцев, задействованных на текущей и на предыдущей заявках.

В данной задаче весом w_i будет являться количество человек, необходимое для i – той заявки. W=23 – максимальное количество добровольцев.

Пусть $f_i(y_i)$ – максимальная общая оценка от этапов i, i + 1,…, 5 при заданном состоянии y_i. Проще всего рекуррентное уравнение определяется с помощью следующей двухшаговой процедуры.

Шаг 1. Выразим $f_i(y_i)$ как функцию $f_{i+1}(y_{i+1})$ в виде

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{x_i = 0,1, \\ y_i = w_i, ..., W}} \{r_i x_i + f_{i+1}(y_{i+1})\}, \; i = 1,2,...,5,$$

где $f_6(y_6)$=0.

Шаг 2. Выразим y_{i+1} как функцию y_i для гарантии того, что левая часть последнего уравнения является функцией лишь y_i. По определению $y_i – y_{i+1}$ представляет собой вес, загруженный на этапе i, т.е.

$$y_i – y_{i+1} = w_i x_i \text{ или } y_{i+1} = y_i – w_i x_i.$$

Следовательно, рекуррентное уравнение приобретает следующий вид.

$$f_i(y_i) = \max_{\substack{x_i = 0,1, \\ y_i = w_i, ..., W}} \{r_i x_i + f_{i+1}(y_i - w_i x_i)\}, \; i = 1,2,...,5,$$

$$f_{i+1}(y_i - w_i x_i) = 0, \text{если } y_{i+1} < w_i.$$

Задача 4.

Постановка задачи: Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_i $i=\overline{1,n}$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_j $j=\overline{1,m}$ Известны c_{ij} ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$) - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные параметры

n – количество пунктов отправления,

m – количество пунктов назначения,

a_i – запас продукции у i-го поставщика ($i=\overline{1,n}$) [ед. прод.],

b_j – спрос на продукцию j-ым потребителем ($j=\overline{1,m}$) [ед. прод.],

c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю [руб./ед. прод.].

Искомые параметры

x_{ij} – количество продукции, перевозимой от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю [ед. прод.].

$L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Ограничения

1) запасы всех поставщиков вывозятся полностью

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,n};$$

2) потребности каждого потребителя должны быть полностью удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j=\overline{1,m};$$

3) условиями неотрицательности всех переменных задачи

$$x_{ij} \ge 0\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right)\cdot$$

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,m}, \\ x_{ij} \ge 0 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Задача о добыче и производстве балласта

Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Бульдозеры, маш.-ч	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Трудовые ресурсы, чел.-ч	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль, тыс. ден. ед.	c_1	c_2	c_3	

Потребность в балласте песчано-гравийном не превышает 8 тыс. м^3, в балласте щебеночном – 5 тыс. м^3. Определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль.

2. Строящаяся линия разбита на четыре различных по протяженности участка, на которых производятся балластировочные работы. Имеются три балластных карьера, мощность которых достаточна для покрытия общей потребности участков в балласте и составляет соответственно a_1, a_2, a_3 тыс. м^3 балласта. Потребность каждого участка в балласте равна соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 тыс. м^3. Карьеры и участки линии связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки и соответственно затраты на перевозку тыс. м^3 балласта c_{ij} ($i = 1, 3$, $j = 1, 4$).

Требуется прикрепить балластные карьеры к участкам линии таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в балласте при минимальных общих затратах на перевозки.

3. *Задача о назначениях*

Строительной компании необходимо выполнить бетонные работы на 4 строящихся объектах. В фирме имеется 4 бригады бетонщиков, которые могут выполнить эту работу. Бригадиры каждой бригады побывали на объектах, оценили объемы работ и рассчитали сроки, за которые они могут выполнить работы.

Бригада	Объект			
	1	2	3	4
№1	30	40	50	60
№2	N+30	N+40	N+50	58
№3	N+20	44	49	N+50
№4	35	N+30	N+40	63

Перед руководством фирмы стоит задача распределения бригад по объектам таким образом, чтобы суммарный срок выполнения всех работ был минимальным.

4. *Задача распределения ресурсов*

Необходимо распределить рабочих на строительство новых четырех объектов, чтобы выполнить максимальный объем строительно-монтажных работ, если известно, что объем СМР на объектах в зависимости от количества рабочих, направляемых на эти объекты, различен.

Количество рабочих	Номера объектов			
	1	2	3	4
	Объем СМР, тыс. руб.			
0	0	0	0	0
10	7	9	6	13
20	14	15	18	16
30	30	19	24	27
40	33	27	36	35

5. *Задача о загрузке*

"Жилище для Человечества" — прекрасная благотворительная организация, которая строит дома для бедствующих семей силами добровольцев. Такая семья может выбрать себе дом из трех типоразмеров: 1000, 1100 и 1200 квадратных футов. Дом каждого типоразмера требует выполнения определенного объема работ силами добровольцев. Филиал организации в городе Файтвилл получил пять заявок на предстоящие шесть месяцев. Комитет по надзору дает оценку каждой заявке в численном виде, принимая во внимание различные факторы. Более высокая оценка означает более острую потребность в жилье. В течение предстоящих шести месяцев филиал организации в этом городе может привлечь к работе максимум 23 добровольца. Какие заявки следует утвердить комитету?

6. *Задача коммивояжера*

Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов i и j известны и составляют c_{ij} . Коммивояжер выезжает из какого-либо города и должен посетить все города, побывав в каждом только один раз и вернуться в исходный город. Ставится задача определить такую последовательность объезда городов, или маршрут, при которой суммарная длина маршрута была бы минимальной.

7. *Задача о раскрое*

Для изготовления брусьев трех длин (0,2; 0,3 и 0,5 м) на распил поступили бревна длиной 1 м. Нужно получить не менее 150 и не более 200 брусьев длиной 0,2 м; не менее 200 и не более 300 брусьев длиной 0,3 м; не менее 300 и не более 330 брусьев длиной 0,5 м. Как распиливать бревна, чтобы обеспечить нужное число брусьев каждого размера и при этом минимизировать отходы?

8. *Задача планирования производства.*

Для производства трех различных видов деталей используют токарные, фрезерные и строгальные станки. Обработку каждой детали можно вести тремя различными технологическими способами. В табл. 2. указаны ресурсы (ч) каждой группы станков и время (ч), затрачиваемые на обработку детали по соответствующему технологическому способу. Прибыль от продажи деталей не зависит от способа производства и составляет 16, 18, 30 единиц за одну деталь первого, второго и третьего вида соответственно. Спланировать производство деталей, обеспечивающее максимум прибыли.

Таблица 2

Тип станка	Детали								Ресурсы времени, ч
	1		2			3			
	Технологические способы								
	1	2	1	2	3	1	2	3	
Токарный	0,4	0,9	0,5	0,3	—	0,7	—	0,9	370
Фрезерный	0,5	—	0,6	0,2	0,5	0,3	0,4	—	660
Строгальный	0,3	0,5	0,4	0,5	0,3	—	1,0	0,5	700

9. *Задача планирования рабочей силы*.

Строительный подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из последующих пяти недель следующим образом, 6,5,3,6,8 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится подрядчику в 300 долларов за одного рабочего в неделю. А наем рабочей силы на протяжении одной недели обходится 400 долларов плюс 200 долларов за одного рабочего в неделю. Каждому уволенному рабочему выплачивается выходное пособие в размере 100 долларов. Найти оптимальное решение задачи.

Контрольные вопросы

1. Типы математических моделей.

2. Линейное программирование: модель распределительной задачи и методы решения

3. Линейное программирование: модель транспортной задачи (ТЗ), методы нахождения опорных планов ТЗ, методы нахождения оптимальных

планов.

4. Целочисленное программирование: модель задачи о назначении и венгерский метод ее решения

5. Динамическое программирование: основные понятия и определения, функция Беллмана, принцип оптимальности Беллмана, функциональные уравнения Беллмана; модели задач: задача распределения ресурсов, задача о загрузке.