# Моделирование систем с использованием Марковских случайных процессов

## Основные понятия

Функция $X(t)$ называется ***случайной***, если ее значение при любом аргументе $t$ является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется ***случайным процессом*.**

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе $S$, называется ***Марковским*** (или *процессом без последействия*), если он обладает следующим свойством: для любою момента времени $t_0$ вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

- с дискретными состояниями и дискретным временем (*цепь Маркова*);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (*Марковские последовательности*);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (*непрерывная цепь Маркова*);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого *графа состояний*, где кружками обозначены состояния $S_1$, $S_2$, ... системы $S$, а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т. е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют ***марковской цепью***. Для такого процесса моменты $t_1$, $t_2$, …, когда система $S$ может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время $t$, а номер шага 1, 2, ..., $k$, ... Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(k)$, ..., где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ – состояние системы после первого шага; $S(k)$ – состояние системы после $k$-го шага.

***Вероятностями состояний*** цепи Маркова называются вероятности $P_i(k)$ того, что после $k$-го шага (и до $(k + 1)$-го) система $S$ будет находиться в состоянии $S_i$ ($i = 1, 2, ..., n$). Очевидно, для любою $k$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(k) = 1. \qquad (1)$$

***Начальным распределением вероятностей*** Марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:

$$P_1(0),\ P_2(0),\ \ldots,\ P_i(0),\ \ldots,\ P_n(0). \qquad (2)$$

В частном случае, если начальное состояние системы $S$ в точности известно $S(0) = S_i$, то начальная вероятность $P_i(0)=1$, а все остальные равны нулю.

***Вероятностью перехода*** (переходной вероятностью) на $k$-м шаге из состояния $S_i$ в состояние $S_j$ называется условная вероятность того, что система $S$ после $k$-го шага окажется в состоянии $S_j$ при условии, что непосредственно перед этим (после $k$ - 1 шага) она находилась в состоянии $S_i$.

Поскольку система может пребывать в одном из $n$ состояний, то для каждого момента времени $t$ необходимо задать $n^2$ вероятностей перехода $P_{ij}$, которые удобно представить в виде следующей матрицы:

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $P_{ij}$ – вероятность перехода за один шаг из состояния $S_i$ в состояние $S_j$;
$P_{ii}$ – вероятность задержки системы в состоянии $S_i$.

Матрица (3) называется ***переходной*** или ***матрицей переходных вероятностей.***

Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется ***однородной***.

Если для однородной Марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей (2) и матрица переходных вероятностей $\left\| P_{ij} \right\|$ (3), то вероятности состояний системы $P_i(k)$ ($i, j$ = 1, 2, …, $n$) определяются по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ji}\ . \qquad (4)$$

**Пример 1.** Рассмотрим процесс функционирования системы – автомобиль. Пусть автомобиль (система) в течение одной смены (суток) может находиться в одном из двух состояний: исправном ($S_1$) и неисправном ($S_2$). Граф состояний системы представлен на рис. 1.

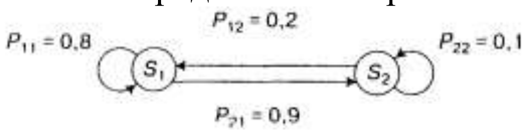



Рис. 1. Граф состояний автомобиля

В результате проведения массовых наблюдений за работой автомобиля составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где

$P_{11}$ = 0,8 – вероятность того, что автомобиль останется в исправном состоянии;

$P_{12}$ = 0,2 – вероятность перехода автомобиля из состояния «исправен» в состояние «неисправен»;

$P_{21}$ = 0,9 – вероятность перехода автомобиля из состояния «неисправен» в состояние «исправен»;

$P_{22}$ = 0,1 – вероятность того, что автомобиль останется в состоянии «неисправен».

Вектор начальных вероятностей состояний автомобиля задан $P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. $P_1(0) = 0$ и $P_2(0)=1$.

Требуется определить вероятности состояний автомобиля через трое суток.

Используя матрицу переходных вероятностей, определим вероятности состояний $P_i(k)$ после первого шага (после первых суток):

$$P_1(1) = P_1(0)\cdot P_{11} + P_2(0)\cdot P_{21} = 0\cdot 0{,}8 + 1\cdot 0{,}9 = 0{,}9;$$

$$P_2(1) = P_1(0)\cdot P_{12} + P_2(0)\cdot P_{22} = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Вероятности состояний после второго шага (после вторых суток) таковы:

$$P_1(2) = P_1(1)\cdot P_{11} + P_2(1)\cdot P_{21} = 0{,}9\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0{,}9 = 0{,}81;$$

$$P_2(2) = P_1(1)\cdot P_{12} + P_2(1)\cdot \mathrm{P}_{22} = 0{,}9\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}1 = 0{,}19.$$

Вероятности состояний после третьего шага (после третьих суток) равны

$$P_1(3) = P_1(2)\cdot P_{11} + P_2(2)\cdot P_{21} = 0{,}81\cdot 0{,}8 + 0{,}19\cdot 0{,}9 = 0{,}819;$$

$$P_2(3) = P_1(2)\cdot P_{12} + P_2(2)\cdot P_{22} = 0{,}81\cdot 0{,}2 + 0{,}19\cdot 0{,}1 = 0{,}181.$$

Таким образом, после третьих суток автомобиль будет находиться в исправном состоянии с вероятностью 0,819 и в состоянии «неисправен» с вероятностью 0,181.

Все многообразие Марковских цепей подразделяется на эргодические и разложимые.

Разложимые Марковские цепи содержат невозвратные состояния, называемые ***поглощающими***. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме поглощающему состоянию соответствует вероятность, равная 1.

Эргодические Марковские цепи описываются сильно связанным графом. Это означает, что в такой системе возможен переход из любого состояния $S_i$ в любое состояние $S_j$ ($i,j=1\ldots n$) за конечное число шагов.

Для эргодических цепей при достаточно большом времени функционирования ($t$ стремится к бесконечности) наступает стационарный режим, при котором вероятности $P_i$ состояний системы не зависят от времени и не зависят от распределения вероятностей в начальный момент времени, т.е. $P_i$=const.

Для определения стационарных вероятностей $P_i$ нахождения системы в состоянии $S_i$ (i=1...$n$) нужно составить систему $n$ линейных однородных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j P_{ij}\ , (i=1\ldots n) \tag{6}$$

Причем, искомые вероятности должны удовлетворять условию:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n} \tag{7}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (6) удобно составлять непосредственно по размеченному графу состояний. При этом в левой части уравнения записывается вероятность состояния, соответствующего рассматриваемой вершине графа, а в правой части – сумма произведений. Число слагаемых соответствует числу дуг графа, входящих в рассматриваемое состояние. Каждое слагаемое представляет произведение вероятности того состояния, из которого выходит дуга графа, на переходную вероятность, которой помечена соответствующая дуга графа.

**Пример 2.** Центральный процессор мультипрограммной системы в любой момент времени выполняет либо программы пользователя, либо программы операционной системы, либо находится в состоянии ожидания. Продолжительность нахождения системы в каждом состоянии кратна длительности шага. Определить коэффициент использования процессора, если задана матрица вероятностей переходов из одного состояния в другое.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

*Решение.*

$S_1$ – состояние, в котором реализуются задачи пользователя;

$S_2$ – состояние, в котором реализуются программы операционной системы;

$S_3$ – состояние простоя.

Граф функционирования системы имеет вид:

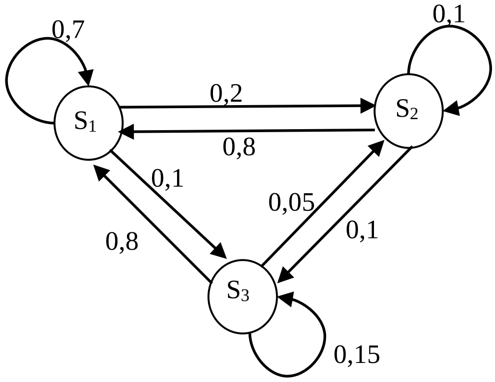



Рис. 2. Граф состояний системы

Составим для установившегося режима систему линейных алгебраических уравнений.

$$P_1 = 0{,}7P_1 + 0{,}8P_2 + 0{,}8P_3;$$
$$P_2 = 0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}05P_3;$$
$$P_3 = 0{,}1P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}15P_3;$$
$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

В результате решения получаем значение вероятностей состояния в установленном режиме:

$$P_1 = 0{,}749;\ P_2 = 0{,}154;\ P_3 = 0{,}097.$$

Коэффициент простоя процессора $K_n = P_3 = 0{,}097$.

Коэффициент использования $P_u = 1 - K_n = 0{,}903$, при этом на обработку программ пользователя затрачивается 74,3% времени, а на обслуживание операционной системы – 15,4%.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется ***непрерывной цепью Маркова*** при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

В экономике часто встречаются ситуации, которые указать заранее невозможно. Например, любая деталь или агрегат могут выходить из строя в любой, непредсказуемый заранее момент времени. Для описания таких систем и отдельных случаев можно использовать математический аппарат непрерывной цепи Маркова.

Пусть $S_1,...,S_n$ – всевозможные состояния системы $S$. Вероятность $p_i(t) = p(S_i(t)), i = 1,\ldots,n; t \geq 0$ события $S_i(t)$, состоящего в том, что система $S$ в момент времени $t$ находится в состоянии $S_i$, называется вероятностью $i$-ого состояния системы в момент времени. Вероятность состояния $p_i(t)$ является, таким образом, вероятностной функцией времени $t \geq 0$.

Так как в любой момент времени $t$ система $S$ будет находиться только в одном из состояний $S_1,...,S_n$, то события $S_i(t), i = 1,\ldots,n$ несовместны и образуют полную группу. Поэтому имеет место нормировочное условие: $\sum_{t=1}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \geq 0$.

Плотностью вероятности перехода системы $S$ из состояния $S_i$ в состояние $S_j$ в момент времени t называется величина $\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$, откуда следует, что $p_{ij}(t;\Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) * \Delta t, \Delta t \to 0$. Из определения плотностей вероятности перехода $\lambda_{ij}(t)$ видно, что они в общем случае зависят от времени $t$, неотрицательны и в отличие от вероятностей могут быть больше 1.

Если при любых $i \neq j; i, j = 1,...,n$ плотности вероятностей переходов не зависят от времени $t$, и тогда вместо $\lambda_{ij}(t)$ будем писать просто $\lambda_{ij}$, то Марковский процесс с непрерывным временем называется ***однородным***. Если же хотя бы при одной паре значений $i \neq j$ плотность вероятности перехода $\lambda_{ij}$ изменяется с течением времени *t*, процесс называется ***неоднородным***.

Вероятности состояний $p_i(t), i = 1,\dots,n$ (неизвестные вероятностные функции) являются решением следующей системы дифференциальных уравнений: $\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) p_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t), i = 1,\dots,n; t \geq 0$. Система представляет собой систему *n* обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эта система называется ***системой дифференциальных уравнений Колмогорова***.

Составить систему Колмогорова удобно по одному из следующих правил:

*1. правило составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова по размеченному графу состояний.*

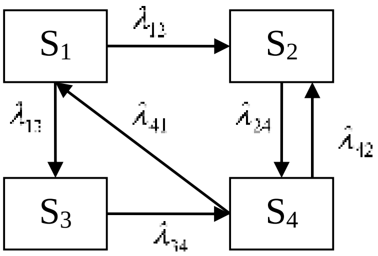



Рис. 3. Граф состояний системы

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение Колмогорова для функции $p_i(t), i = 1,\dots,n$, надо в левой части этого уравнения записать производную $\frac{dp_i(t)}{dt}$ функции $p_i(t)$, а в правой части уравнения – произведение $-(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}) p_i(t)$ суммы $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ij}$ у стрелок, выходящих из состояния $S_i$, на вероятность $p_i(t)$ этого состояния со знаком минус, плюс сумму $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t)$ произведений $\lambda_{ji} p_j(t)$ плотностей вероятностей переходов $\lambda_{ji}$, соответствующих стрелкам, входящим в состояние $S_i$, на вероятности состояний $p_j(t)$, из которых эти стрелки выходят. При этом плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij}$, соответствующие отсутствующим стрелкам на графе, равны 0.

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1(t) + \lambda_{41}p_4(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{42}p_4(t) \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}p_3(t) + \lambda_{13}p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{42})p_4(t) + \lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{34}p_3(t) \end{cases}$$

*2. правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова по матрице плотностей вероятностей переходов.*

Для составления дифференциального уравнения Колмогорова для функции $p_i(t), i = 1,\dots,n$ надо в левой части уравнения записать производную $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$ функции $p_i(t)$, а в правой части уравнения – произведение - $(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij})p_i(t)$ суммы $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ элементов $\lambda_{ij}$ $i$-ой строки матрицы $\Lambda$ плотностей вероятностей на вероятность $p_i(t)$ состояния $S_i$ (номер которой совпадает с номером взятой строки) со знаком минус, плюс сумму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t)$ произведений $\lambda_{ji}p_j(t)$ элементов $i$-го столбца на соответствующие им вероятности $p_j(t)$.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова составленная, например, по матрице плотностей вероятностей переходов

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

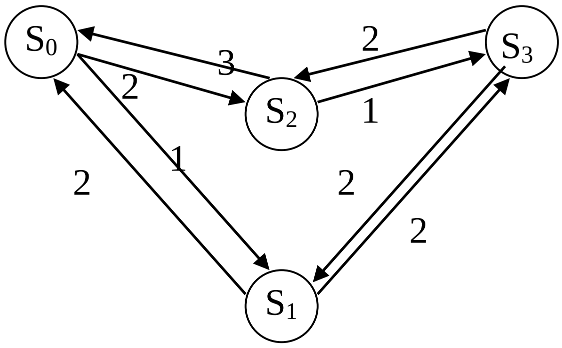
имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -5p_1(t) + 6p_2(t) + 1{,}5p_3(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -6p_2(t) + 2p_1(t) + 4p_3(t) \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -5{,}5p_3(t) + 3p_1(t) \end{cases}.$$

Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то имеет смысл говорить о предельном поведении вероятностей $P_i(t)$ при $t\to\infty$. В некоторых случаях существуют финальные (предельные) вероятности состояний $P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t)$, не зависящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент. Говорят, что в системе устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности уже не меняются. Система, для которой существуют финальные вероятности называется ***эргодической***, а соответствующий случайный процесс – ***эргодическим***.

Финальные вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояний $P_1(t),\ldots,P_n(t)$ в правых частях уравнений заменить соответственно на неизвестные финальные вероятности $P_1,\ldots,P_n$. Для нахождения точного значения $P_1,\ldots,P_n$. к уравнениям добавляют нормировочное условие $P_0+P_1+\ldots+P_n=1$.

**Пример 3**. Граф состояний системы имеет вид:




Найдите вероятности состояний системы в стационарном режиме.

*Решение*. Составим систему уравнений Колмогорова для данного графа состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{02})P_0(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{31}P_3(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{13})P_1(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{02}P_0(t) + \lambda_{32}P_3(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{23})P_2(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32})P_3(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = 2P_1(t) + 3P_2(t) - 3P_0(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = P_0(t) + 3P_3(t) - 4P_1(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 2P_0(t) + 2P_3(t) - 4P_2(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = 2P_1(t) + P_2(t) - 5P_3(t). \end{cases}$$

Тогда финальные вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = 2P_1 + 3P_2 - 3P_0, \\ 0 = P_0 + 3P_3 - 4P_1, \\ 0 = 2P_0 + 2P_3 - 4P_2, \\ 1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3. \end{cases}$$

Решить эту систему линейных уравнений можно, например, методом Крамера. Для этого найдем:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 48; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 32;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 120.$$

Решение системы имеет вид:

$$P_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{48}{120} = 0{,}4; \quad P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{120} = 0{,}2;$$

$$P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}; \quad P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}.$$

При исследовании непрерывных Марковских цепей, как было уже отмечено, часто бывает удобно представить переход системы из состояния в состояние как воздействие каких-то потоков событии (поток заявок на обслуживание, поток автомобилей, поток документов и т.п.).

***Потоком событий*** называется последовательность событий, наступающих одно за другим в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени.

События в потоке называются ***однородными***, если их различают только по моментам их наступления, и ***неоднородными*** – в противном случае, то есть если различимость событий в потоке помимо моментов их наступления осуществляется еще по каким-нибудь их свойствам.

Различают следующие основные свойства, которыми могут обладать случайные потоки событий:

- стационарность;
- ординарность;
- отсутствие последействия.

***Стационарность.*** Свойство стационарности проявляется в том, что вероятность попадания того или иного числа событии на участок времени $\tau$ зависит только от длины участка и не зависит от расположения на оси Ot. Другими словами, стационарность означает неизменность вероятностного режима потока событий во времени. Поток, обладающий свойством стационарности, называют стационарным. Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным.

***Ординарность.*** Свойство ординарности потока присутствует, если вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событии пренебрежимо мала по сравнению с длиной этого участка. Свойство ординарности означает, что за малый промежуток времени практически невозможно появление более одного события. Поток, обладающий свойством ординарности, называют ординарным.

***Отсутствие последействия*.** Данное свойство потока состоит в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени. Поток, обладающий свойством отсутствия последействия, называют потоком без последействия.

Поток событий, одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется ***простейшим потоком событий.***

Под интенсивностью потока понимают

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{m(t, \mathrm{t} + \tau)}{\tau}, \tag{8}$$

где $m(t, t + \tau)$ – среднее число событий в $(t, t + \tau)$.

Для простейшего потока интенсивность $\lambda = \mathrm{const}$.

Если поток событий не имеет последействия, ординарен, но не стационарен, то его называют ***нестационарным пуассоновским потоком***, а его интенсивность зависит от времени, т. е. $\lambda = \lambda(t)$.

В пуассоновском потоке событий (стационарном и нестационарном) число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по ***закону Пуассона:***

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \; m = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

где $P_m$ – вероятность попадания на участок $m$ событий;
$a$ – среднее число событий, приходящихся на участок.

Для простейшего потока $a = \lambda\tau$, а для нестационарного пуассоновского потока

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt, \tag{10}$$

где $\tau$ –длина участка времени; $t_0$ – начало участка $\tau$.

**Пример 4.** Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно 3. Найдите вероятность того, что за 5 мин. Прибудут 6 самолетов.

*Решение*.

$$\lambda=3,\ \tau=5,\ a=3\cdot 5=15.$$

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} = \frac{15^6}{6!} \cdot \mathring{a}^{-15} = 0{,}005.$$

Рассмотрим еще одну типичную схему непрерывных Марковских цепей – так называемую схему гибели и размножения, часто встречающуюся в разнообразных практических задачах.

Марковский процесс с дискретными состояниями $S_0$, $S_1$, ..., $S_n$ называется ***процессом гибели и размножения***, если все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ($S_1$, $S_2$, ..., $S_{n-1}$) может переходить только в соседние состояния, которые, в свою очередь, переходят обратно, а крайние состояния ($S_0$ и $S_n$) переходят только в соседние состояния (рис. 4).

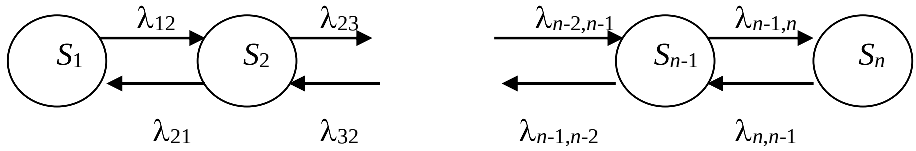


Рис. 4. Процесс гибели и размножения

Здесь $\lambda_{ij}$ – плотность вероятности перехода системы из состояния $S_i$ в состояние $S_j$ в момент времени $t$.

Эта плотность находится по формуле:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{P_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}$$

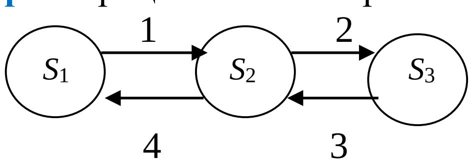
$\Delta t$ – время перехода из одного состояния в другое.

При постоянных интенсивностях потоков гибели и размножения и конечном числе состояний будет существовать стационарный режим. Система $S$ с конечным числом состояний ($n$+1), в которой протекает процесс гибели и размножения, является простейшей эргодической системой.

Предельные (финальные) вероятности состояний для простейшего эргодического процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, определяются по следующим формулам:

$$P_к = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{к-1,к}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{к,к-1}} P_1; \; P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{к-1,к}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{к,к-1}}}.$$

**Пример 5.** Процесс гибели и размножения представлен графом:




Определить предельные вероятности состояний.

*Решение*. По формулам

$$P_к = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{к-1,к}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{к,к-1}} P_1; \; P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{к-1,к}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{к,к-1}}}$$

находим:

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}} = 0{,}706,$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1 = \frac{1}{4} \cdot 0,706 = 0,1765,$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} P_1 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 0,706 = 0,1175.$$

Таким образом, в стационарном режиме система будет находится в среднем 70,6% времени в состоянии $S_1$, 17,65% времени – в состоянии $S_2$, 11,75% времени – в состоянии $S_3$.

## Контрольные вопросы

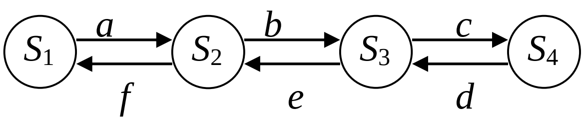
1. Показательный закон распределения вероятностей. Плотность распределения вероятностей, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение.
2. Поток событий. Интенсивность потока. Простейший поток событий, его свойства (стационарность, отсутствие последействия и ординарность).
3. Случайный процесс. Процесс с дискретными состояниями. Процесс с непрерывным временем. Граф состояний. Размеченный граф состояний.
4. Уравнения Колмогорова.
5. Предельные вероятности состояний.
6. Процесс гибели и размножения.

## Задания для самостоятельной работы

**Задача 1.** Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно $a$. Найти вероятность того, что за $t = b$ минут прибудут $c$ самолетов. Поток предполагается простейшим.

| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 9 | 8 | 5 | 4 | 6 | 7 | 8 | 6 | 4 | 5 |
| $b$ | 4 | 9 | 5 | 6 | 8 | 7 | 5 | 6 | 7 | 2 |
| $c$ | 2 | 7 | 4 | 9 | 5 | 5 | 8 | 6 | 9 | 7 |

**Задача 2.** Найти предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:




| вариант | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 4 | 2 | 5 | 5 | 5 | 2 | 9 | 7 | 3 |
| $b$ | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 6 | 7 | 4 | 3 | 1 |
| $c$ | 7 | 1 | 5 | 7 | 6 | 9 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $d$ | 1 | 4 | 6 | 2 | 1 | 1 | 7 | 4 | 5 | 2 |
| $e$ | 4 | 1 | 5 | 9 | 5 | 6 | 6 | 1 | 8 | 7 |
| $f$ | 4 | 3 | 9 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 9 | 5 |

**Задача 3.** За определенное количество дней можно выполнить строительство объекта, если имеются на площадке запасы стройматериалов (состояние $s_1$), или их можно приобрести на оптовой базе (состояние $s_2$), или непосредственно на заводе-изготовителе (состояние $s_3$). Вероятности $p_{ij}$ переходов из состояния $s_i$ в $s_j$ за один шаг таковы: $p_{13}$, $p_{32}$, $p_{21}$, $p_{31}$, остальные вероятности $p_{ij}$ (при $i \neq j$) равны 0. Элементы на диагонали матрицы подобрать так, чтобы вместе с заданными недиагональными элементами в каждой строке давали сумму, равную 1.

| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_{13}$ | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,3 |
| $p_{32}$ | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,3 |
| $p_{21}$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |
| $p_{31}$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Требуется:

Найти вероятность того, что невостребованные потребителем стройматериалы будут оставаться на оптовой базе спустя три дня после начала строительства, если в начале стройки они достоверно там были.