Моделирование систем с использованием Марковских случайных процессов

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Основные понятия Марковских процессов

Случайная функция

- Функция $X(t)$ называется **случайной**, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной

Случайный процесс

- Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется **случайным процессом**

Марковский процесс

- Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется **Марковским** (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любою момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние

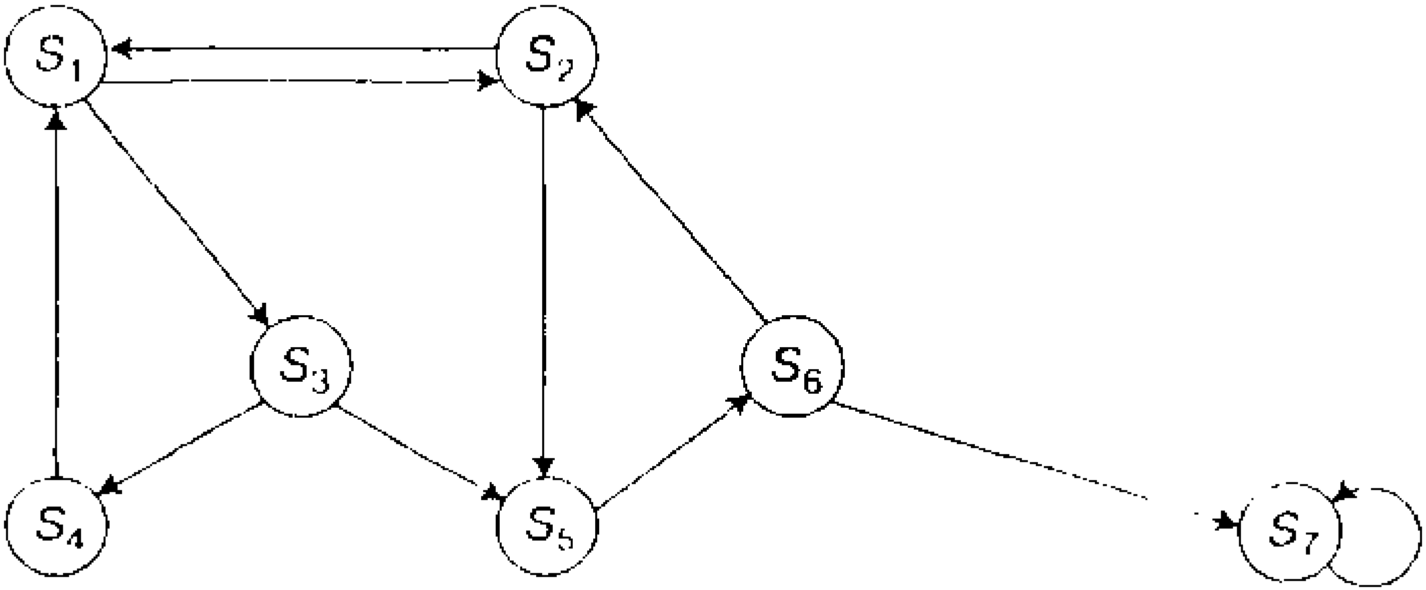
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Классификация марковских процессов

Марковские процессы

- с дискретными состояниями и дискретным временем (*цепь Маркова*)
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (*Марковские последователь-ности*)
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (*непрерывная цепь Маркова*)
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем

Граф состояний цепи Маркова



Основные понятия цепи Маркова

- Вероятности состояний $P_i(k)$:

$$P_1(k), P_2(k), P_3(k), \ldots, P_n(k);$$

$$P_1(k)+P_2(k)+P_3(k)+\ldots+P_n(k)=1.$$

- Начальное распределение вероятностей

$$P_1(0), P_2(0), P_3(0), \ldots, P_n(0).$$

- Вероятность перехода P_{ij}
- Матрица переходных вероятностей

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Однородная цепь Маркова

Вероятности состояний системы $P_i(k)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определяются по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ji}$$

Вероятности состояний

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ji}$$

- Вероятности состояний $P_i(1)$ после первого шага:

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} + \ldots + P_n(0) \cdot P_{n1};$$
$$P_2(1) = P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(0) \cdot P_{22} + \ldots + P_n(0) \cdot P_{n2};$$
$$\ldots$$
$$P_n(1) = P_1(0) \cdot P_{1n} + P_2(0) \cdot P_{2n} + \ldots + P_n(0) \cdot P_{nn};$$

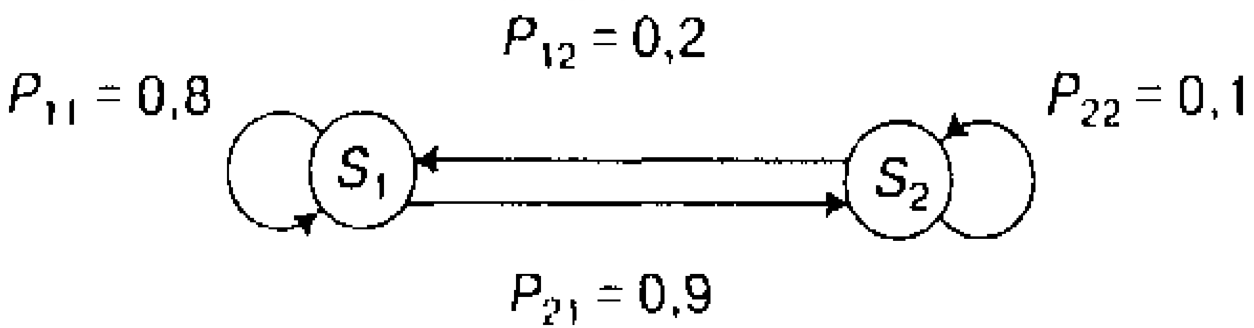
- Вероятности состояний $P_i(2)$ после второго шага:

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} + P_2(1) \cdot P_{21} + \ldots + P_n(1) \cdot P_{n1};$$
$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot \mathrm{P}_{22} + \ldots + P_n(1) \cdot P_{n2};$$
$$\ldots$$
$$P_n(2) = P_1(1) \cdot P_{1n} + P_2(1) \cdot P_{2n} + \ldots + P_n(1) \cdot P_{nn}$$

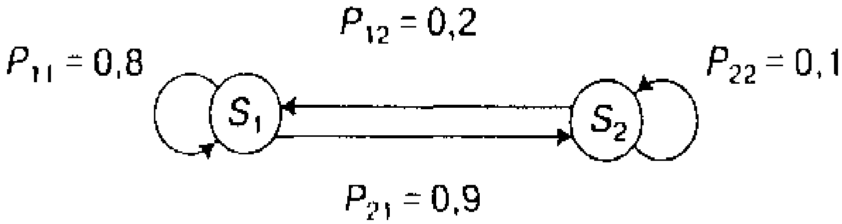
и т.д.

Пример

Рассмотрим процесс функционирования системы – автомобиль. Пусть автомобиль (система) в течение одной смены (суток) может находиться в одном из двух состояний: исправном (S_1) и неисправном (S_2). Граф состояний системы имеет вид:



Начальное состояние автомобиля – неисправен. Требуется определить вероятности состояний автомобиля через трое суток


$P_{12} = 0,2$
$P_{11} = 0,8$
$P_{22} = 0,1$
S_1
S_2
$P_{21} = 0,9$

Виды марковских цепей

Марковские цепи

- Разложимые
- Эргодические

Эргодические марковские цепи

Стационарные вероятности P_i :

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j P_{ji}, \qquad \begin{cases} P_1 = P_1 P_{11} + P_2 P_{21} + \ldots + P_n P_{n1}; \\ P_2 = P_1 P_{12} + P_2 P_{22} + \ldots + P_n P_{n2}; \\ \ldots \\ P_n = P_1 P_{1n} + P_2 P_{2n} + \ldots + P_n P_{nn}; \end{cases}$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Искомые вероятности должны удовлетворять условию

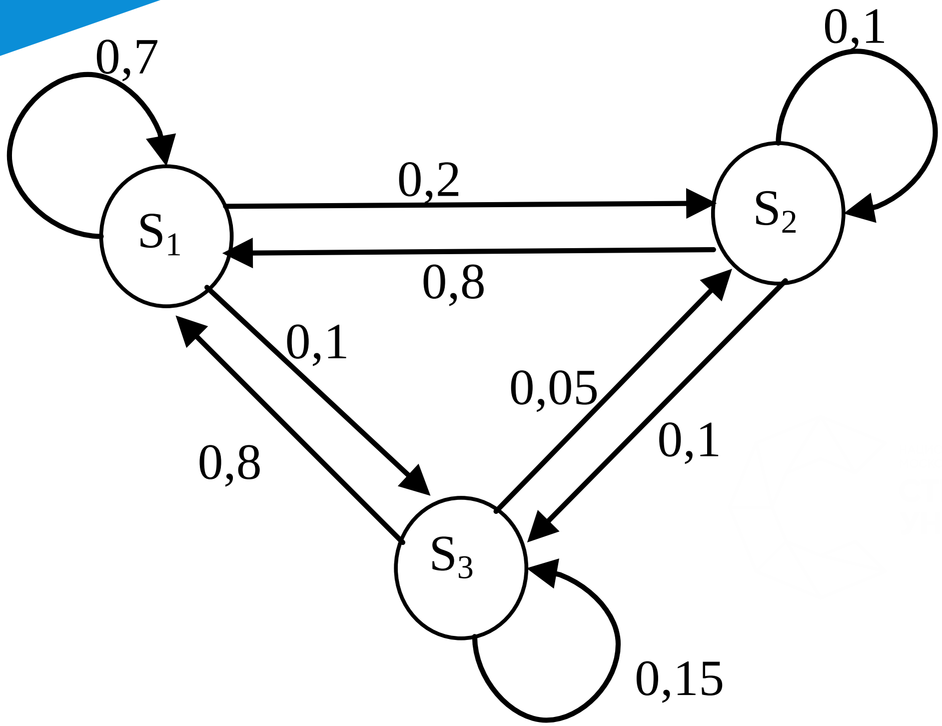
$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

Пример

Центральный процессор мультипрограммной системы в любой момент времени выполняет либо программы пользователя, либо программы операционной системы, либо находится в состоянии ожидания. Продолжительность нахождения системы в каждом состоянии кратна длительности шага. Определить коэффициент использования процессора, если задана матрица вероятностей переходов из одного состояния в другое:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,05 & 0,15 \end{pmatrix}$$

Граф состояний



Система линейных уравнений для установившегося режима

$$P_1 = 0{,}7P_1 + 0{,}8P_2 + 0{,}8P_3;$$
$$P_2 = 0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}05P_3;$$
$$P_3 = 0{,}1P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}15P_3;$$
$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

$$P_1 = 0{,}727;\ P_2 = 0{,}168;\ P_3 = 0{,}105.$$

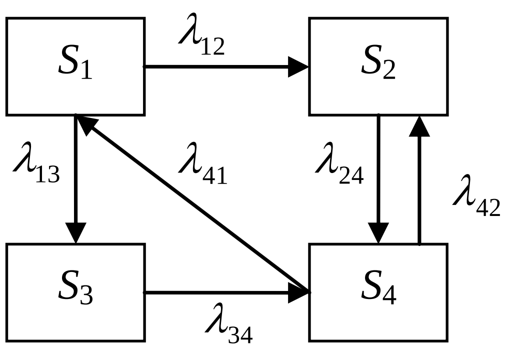
- Коэффициент простоя процессора $K_п = P_3 = 0{,}105$.
- Коэффициент использования $P_и = 1 – K_п = 0{,}895$, при этом на обработку программ пользователя затрачивается 72,7% времени, а на обслуживание операционной системы – 16,8%.

Правила составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова

1) По размеченному графу состояний

2) По матрице плотностей вероятностей переходов

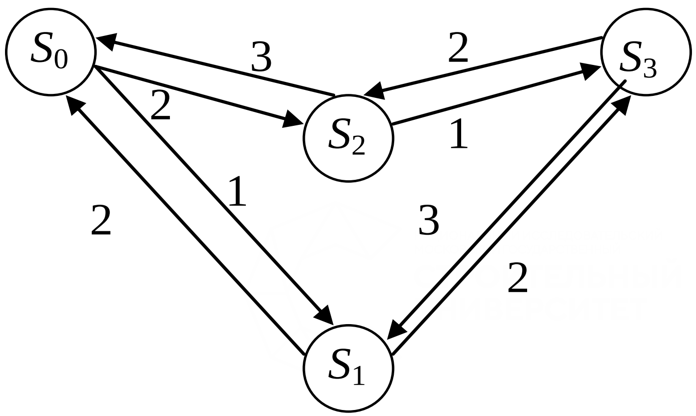
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) p_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t), i = 1, \dots, n; t \ge 0$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

Граф состояний системы имеет вид:



Найти вероятности состояний системы в стационарном режиме

Пример

Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 2P_1(t) + 3P_2(t) - 3P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = P_0(t) + 3P_3(t) - 4P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = 2P_0(t) + 2P_3(t) - 4P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = 2P_1(t) + P_2(t) - 5P_3(t)$$

Пример

Система уравнений для нахождения финальных вероятностей:

$$0 = -3P_0 + 2P_1 + 3P_2$$

$$0 = P_0 - 4P_1 + 3P_3$$

$$0 = 2P_0 - 4P_2 + 2P_3$$

$$0 = 2P_1 + P_2 - 5P_3$$

$$1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

Система уравнений для нахождения финальных вероятностей:

$$\begin{cases} 0 = 2P_1 + 3P_2 - 3P_0, \\ 0 = P_0 + 3P_3 - 4P_1, \\ 0 = 2P_0 + 2P_3 - 4P_2, \\ 1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 120.$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 48; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 32; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16;$$

Решение системы имеет вид:

$$P_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{48}{120} = 0,4; \quad P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{120} = 0,2; \quad P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}; \quad P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}.$$

Потоки событий

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени.

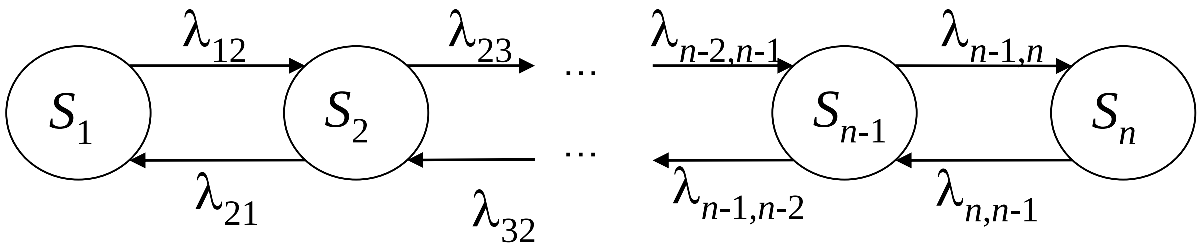
Свойства потока

- стационарность;
- ординарность;
- отсутствие последействия.

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$$

Пример. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно 3. Найдите вероятность того, что за 5 мин прибудут 6 самолетов.

Процесс гибели и размножения



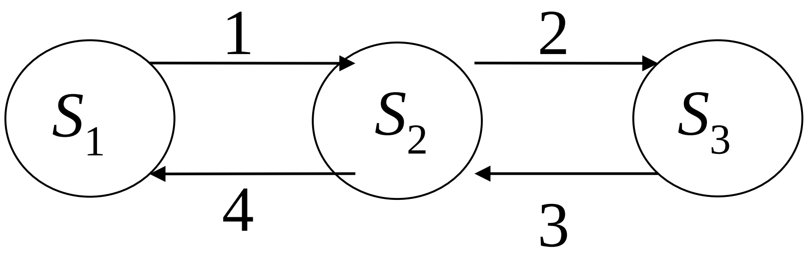
Предельные вероятности

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{k,k-1}}}$$

$$P_k = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{k,k-1}} P_1$$

Пример

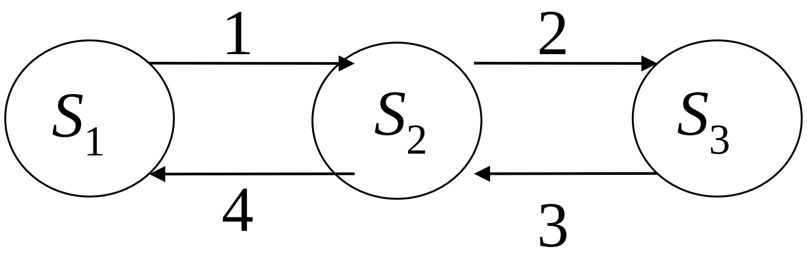
Процесс гибели и размножения представлен графом



Определить предельные вероятности состояний

Пример

Процесс гибели и размножения представлен графом



Определить предельные вероятности состояний

$$P_1 = 0,706, \qquad P_2 = 0,1765, \qquad P_3 = 0,1175.$$

Таким образом, в стационарном режиме система будет находится в среднем 70,6% времени в состоянии S_1, 17,65% времени – в состоянии S_2, 11,75% времени – в состоянии S_3.

Метод Рунге-Кутта

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)/6$$

Метод Рунге-Кутта

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутта

$$k_{i1} = hf_i(x_j, y_{1j}, , \ldots, y_{nj}),$$

$$k_{i2} = hf_i\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{k_{11}}{2}, \ldots, y_{nj} + \frac{k_{n1}}{2}\right),$$

$$k_{i3} = hf_i\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{k_{12}}{2}, \ldots, y_{nj} + \frac{k_{n2}}{2}\right),$$

$$k_{i4} = hf_i\left(x_j + h, y_{1j} + k_{13}, \ldots, y_{nj} + k_{n3}\right),$$

$$x_{j+1} = x_j + h.$$

$$y_{ij+1} = y_{ij} + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}),$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -3y - x; \\ \dfrac{dx}{dt} = y - x \end{cases}$$