Непрерывно-детерминированные модели

D-схемы

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Постановка задачи. Найти решение задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

с начальными условиями

$$y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \ldots, y'(0) = y_0', y(0) = y_0$$

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0),$$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0), \ldots,$$

$$y^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0).$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (a_n p^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - \ldots - y_0^{(n-1)}.$$

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

$$(a_n p^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - \ldots - y_0^{(n-1)} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow F(p) + p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y_0' + \ldots + y_0^{(n-1)}.$$

Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	13	$t^{n-1}e^{\alpha t}$	$\frac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	14	$\cos^2\beta t$	$\frac{p^2+2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	15	$\sin^2\beta t$	$\frac{2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$
4	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	16	$\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t}-1\right)$	$\frac{1}{p(p-\alpha)}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	17	$1-e^{-\frac{t}{\alpha}}$	$\frac{1}{p(1+\alpha p)}$
6	$ch\,\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$	18	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
7	$sh\,\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$	19	$\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-\alpha}}$
8	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$	20	$-\ln t-C$	$\frac{\ln p}{p}$
9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	21	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot(\ln 4p+C)$
10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	22	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{t}$	$\ln\left\lvert\frac{p-\alpha}{p-\beta}\right\rvert$
11	$e^{\alpha t}ch\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$	23	$\frac{\sin\alpha t}{t}$	$arctg\,\frac{\alpha}{p}$
12	$e^{\alpha t}sh\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$	24	$\frac{sh\,\alpha t}{t}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{p+\alpha}{p-\alpha}\right\rvert$

$$2y'' + 28y' + 100y = 3x,\ x(t) = 1(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p),$$
$$y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).$$

$$2y'' + 28y' + 100y \leftrightarrow 2p^2Y(p) + 28pY(p) + 100Y(p).$$

$$3(t) \leftrightarrow \frac{3}{p}$$

$$2p^2Y(p) + 28pY(p) + 100Y(p) = \frac{3}{p}.$$

$$2p^2Y(p)+28pY(p)+100Y(p)=\frac{3}{p}.$$

$$Y(p)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p(p^2+14p+50)}.$$

$$\frac{1}{p(p^2+14p+50)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+14p+50}$$

$$\frac{(A+B)p^2+(14A+C)p+50A}{p(p^2+14p+50)}$$

$$\begin{cases} A+B=0; \\ 14A+C=0; \\ 50A=1. \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{50}, B=-\frac{1}{50}, C=-\frac{7}{25}.$$

$$Y(p)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{50p}+\frac{-\frac{1}{50}p-\frac{7}{25}}{p^2+14p+50}\right)=\frac{3}{100}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{100}\cdot\frac{p}{p^2+14p+50}-\frac{21}{50}\cdot\frac{1}{p^2+14p+50}$$

$$Y(p)=\frac{3}{100}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{100}\cdot\frac{p}{(p+7)^2+1}-\frac{21}{50}\cdot\frac{1}{(p+7)^2+1}.$$

$$Y(p)=\frac{3}{100}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{100}\cdot\frac{p+7}{(p+7)^2+1}+\frac{21}{100}\cdot\frac{1}{(p+7)^2+1}-\frac{21}{50}\cdot\frac{1}{(p+7)^2+1}.$$

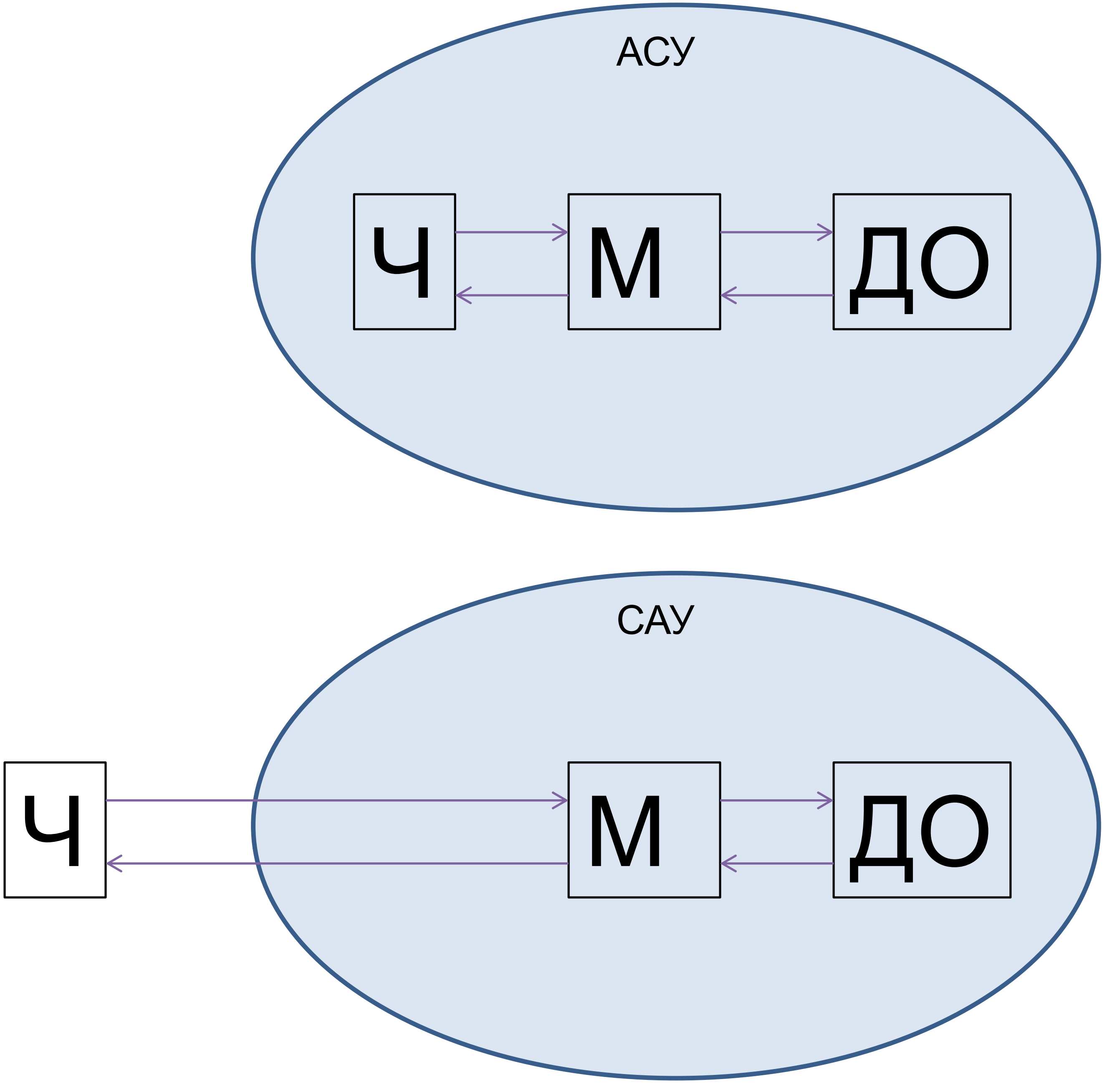
$$Y(p)=\frac{3}{100}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{100}\cdot\frac{p+7}{(p+7)^2+1}-\frac{21}{100}\cdot\frac{1}{(p+7)^2+1}.$$

$$\frac{1}{p}\leftrightarrow 1$$

$$\frac{p+7}{(p+7)^2+1}\leftrightarrow e^{-7t}\cos t$$

$$\frac{1}{(p+7)^2+1}\leftrightarrow e^{-7t}\sin t$$

$$y(t)=\frac{3}{100}-\frac{3}{100}e^{-7t}\cos t-\frac{21}{100}e^{-7t}\sin t$$


АСУ
Ч
М
ДО
САУ
Ч
М
ДО

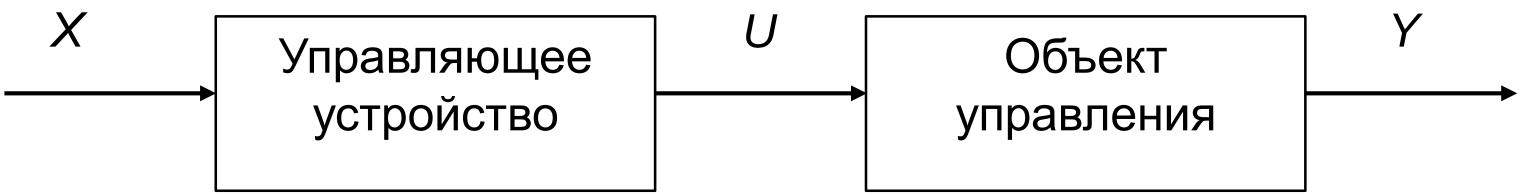


Рис. 1. Структура САУ

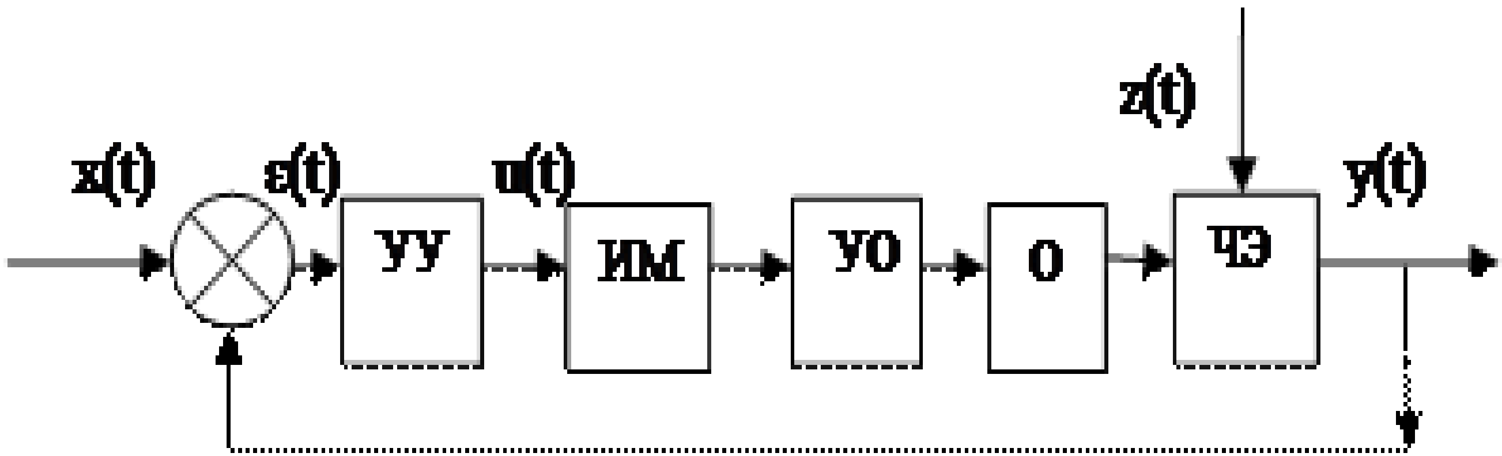


Рис. 2. Детализация функциональной схемы САУ

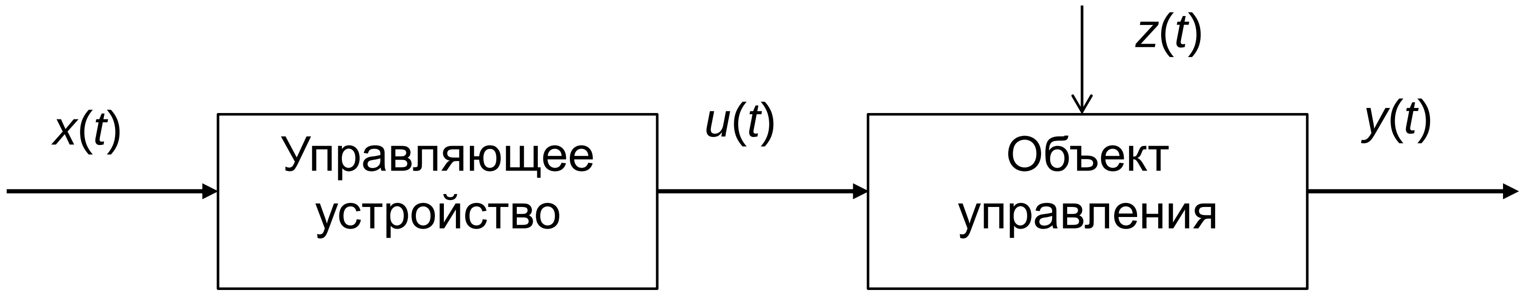


Рис. 3. Функциональная схема разомкнутой системы

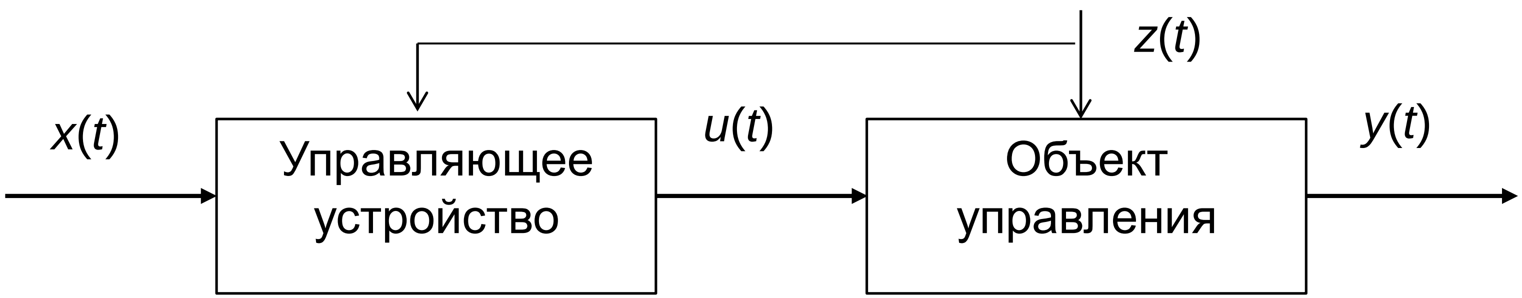


Рис. 4. Функциональная схема разомкнутой САУ с управлением по возмущению

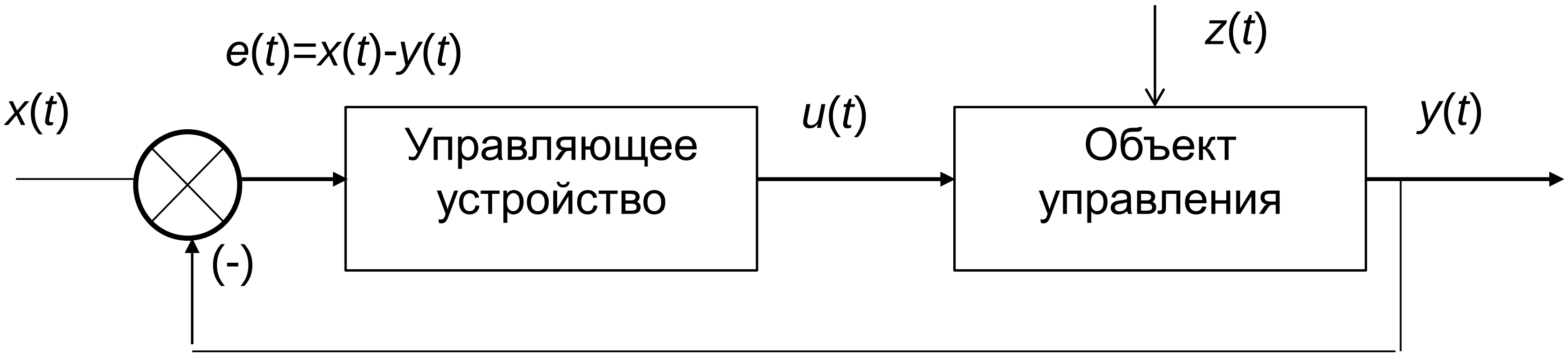


Рис.5. Функциональная схема замкнутой системы с управлением по отклонению

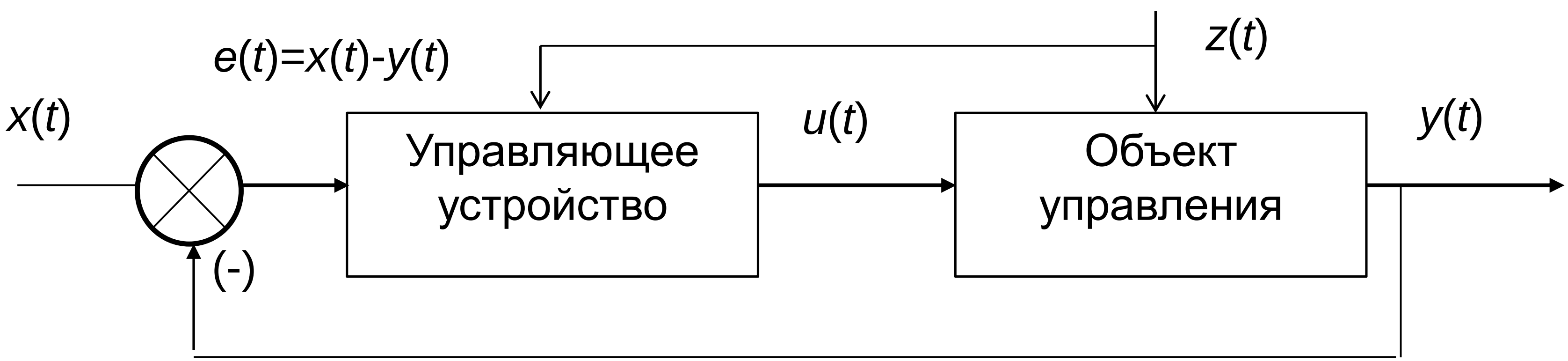


Рис. 6. Функциональная схема системы с комбинированным управлением по отклонению и по возмущению

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}.$$

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$2y'' + 28y' + 100y = 3x(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

$W(j\omega)=\mathrm{Re}+\mathrm{Im}j.$

$$W(s)=\frac{3}{2s^2+28s+100}.$$

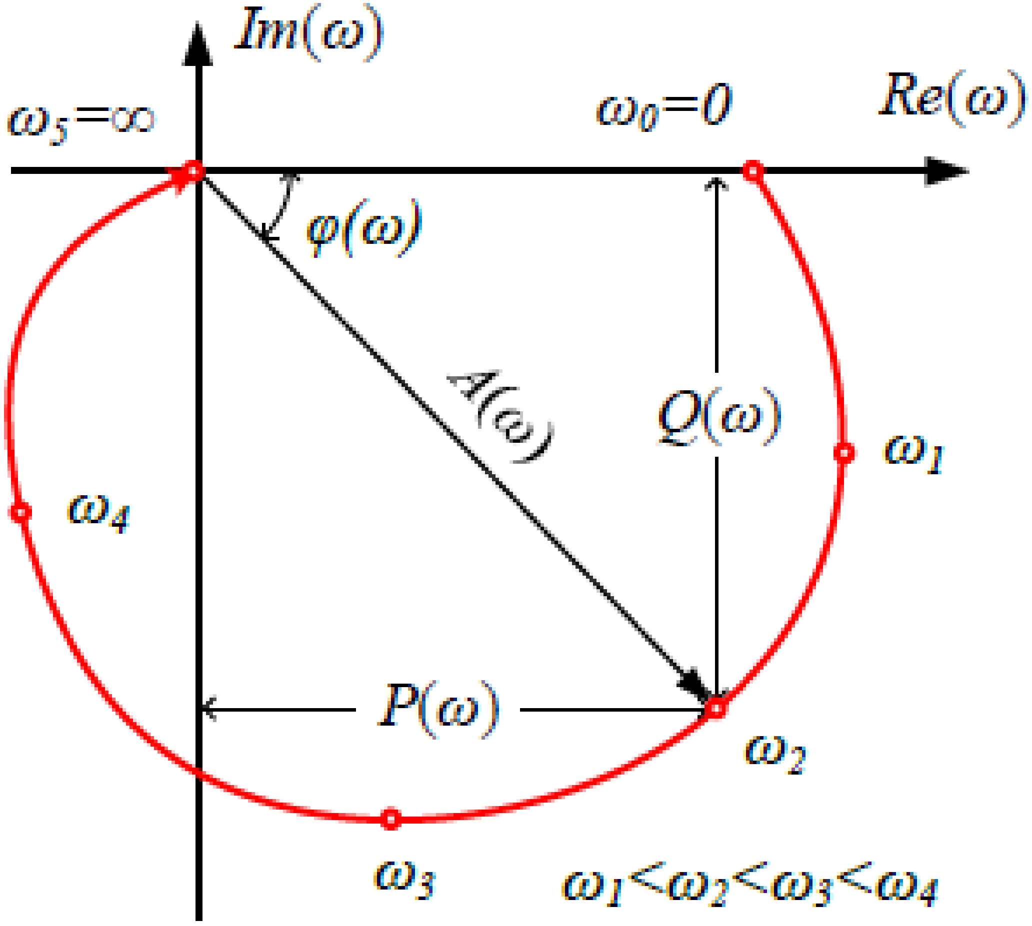
$$W(j\omega)=\frac{3}{2(j\omega)^2+28(j\omega)+100}=\frac{3}{28j\omega+100-2\omega^2}$$

$$=\frac{3(100-2\omega^2-28j\omega)}{(28j\omega+100-2\omega^2)(100-2\omega^2-28j\omega)}=$$

$$=\frac{3(100-2\omega^2-28j\omega)}{(100-2\omega^2)^2+784\omega^2}=\frac{300-6\omega^2}{(100-2\omega^2)^2+784\omega^2}-\frac{84\omega}{(100-2\omega^2)^2+784\omega^2}j.$$

$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}/\mathrm{Re}).$ $\qquad A(\omega)=\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}.$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика



Переходная и весовая функции

Переходная функция $h(t)$ – это реакция линейной системы на ступенчатое воздействие.

Изображение переходного процесса имеет вид:

$$h(s) = \frac{W(s)}{s}$$

Весовая или импульсная функция *k*(*t*) – это реакция линейной системы на дельта-функцию $\delta(t)$. На практике дельта-функцию моделируют коротким импульсом, длительность которого много меньше времени отклика системы, а интеграл по времени равен единице.

$$k(t) = h`(t)$$

Типовые звенья

- Объект называется типовым динамическим звеном, если его передаточная функция содержит полиномы небольшой степени (не выше второй) комплексной переменной *p* в числителе или в знаменателе.

Классификация типовых динамических звеньев

- Минимально фазовые звенья
- Неминимально фазовые звенья

Немиимально фазовые звенья

- Устойчивые – их передаточные функции содержат положительные нули и отрицательные полюсы;
- неустойчивые – их передаточные функции содержат положительные полюсы и отрицательные нули.
- Трансцендентные звенья – это звенья, передаточные функции (ПФ) которых содержат трансцендентные выражения. Пример – звено чистого запаздывания, его ПФ

$$W(p) = ke^{-p\tau}.$$

- Иррациональные звенья – это звенья передаточные функции (ПФ) которых содержат иррациональные выражения. Пример:

$$W(p) = \frac{k}{\sqrt{p}}$$

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

- пропорциональное (усилительное) звено (П);
- апериодическое звено (инерционное звено первого порядка) (А);
- интегрирующее звено (И):
  - идеальное интегрирующее звено (астатическое звено) (ИИ);
  - реальное интегрирующее звено (РИ);
- дифференцирующее звено (Д):
  - идеальное дифференцирующее звено (ИД);
  - реальное дифференцирующее звено (РД):
- колебательное звено (инерционное звено второго порядка) (К);
- запаздывающее звено (З);

МИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

Звенья нулевого и первого порядка

Пропорциональное (безынерционное, усилительное) звено

Уравнение звена и его передаточная функция

$$y(t) = K \cdot x(t) \qquad W(p) = K$$

Частотные и временные функции (характеристики) звена:

ККП $W(j\omega) = K$

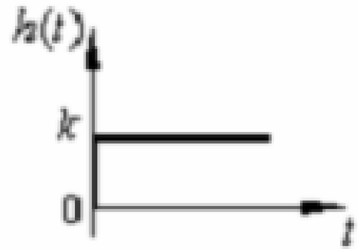
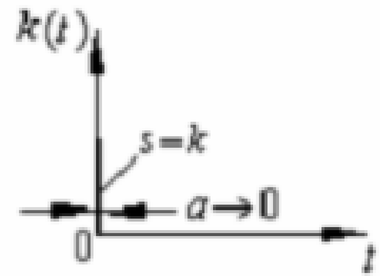
АЧХ $A(\omega) = K$

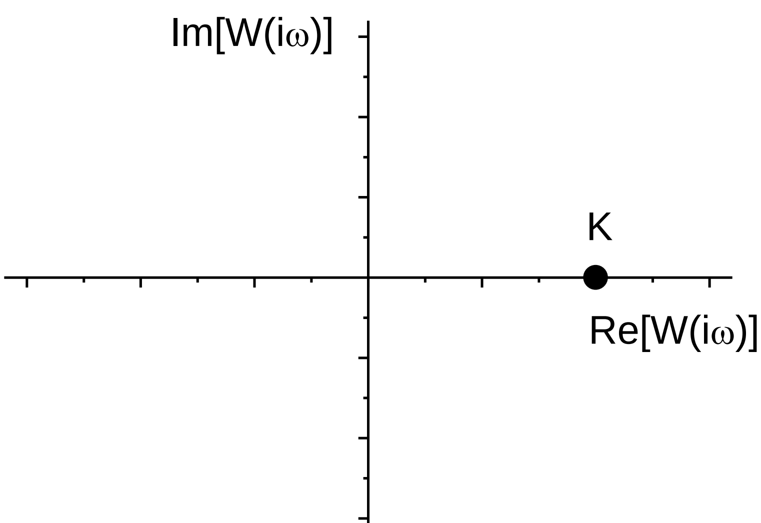
ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \cdot \lg K$

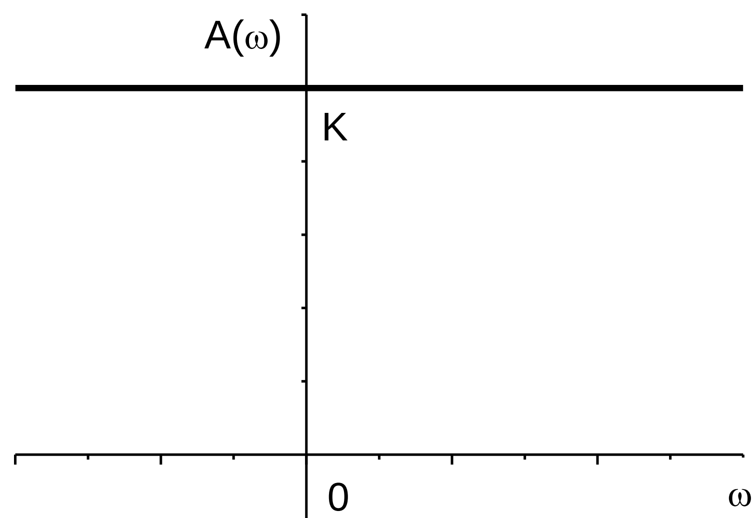
ФЧХ $\varphi(\omega) = 0$

Переходная функция $h(t) = K \cdot 1(t)$

Импульсная переходная функция $k(t) = K \cdot \delta(t)$

Переходная функция	Импульсная переходная функция
	





Инерционное звено (апериодическое звено первого порядка)

Дифференциальное уравнение звена в оригиналах и изображениях:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t) \qquad (Tp+1)Y(p)=KX(p)$$

T – постоянная времени

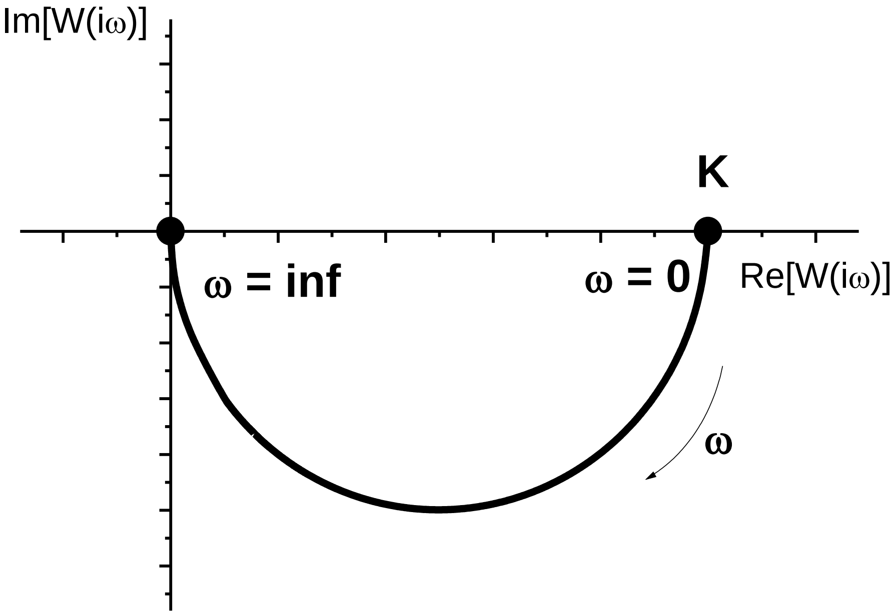
$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{K}{Tp+1}$$

Передаточная функция

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega)=\frac{K}{j\omega T+1}=\frac{K(1-j\omega T)}{1+\omega^2T^2}$$

годограф АФЧХ

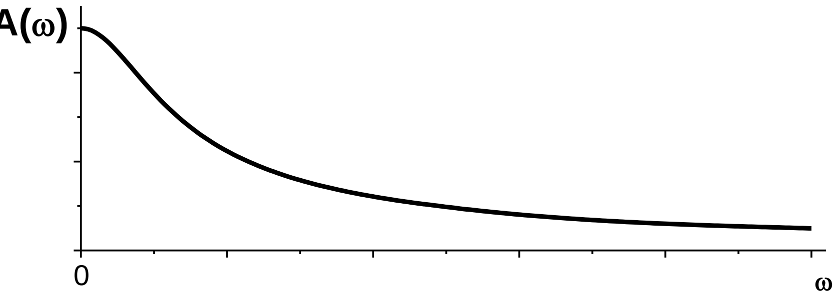


Точная ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{1+\omega^2 T^2}$$

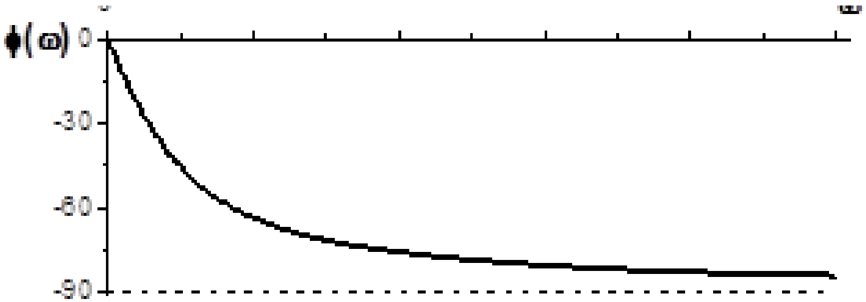
АЧХ

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$



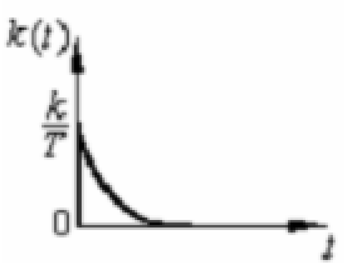
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg}\omega T;$$



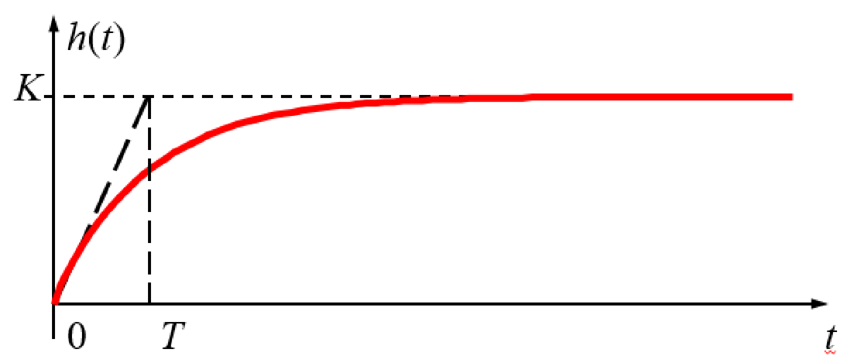
Весовая функция

$$k(t) = (K/T)\cdot e^{-t/T}$$



Переходная функция

$$h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



Идеальное интегрирующее звено

- Уравнение и передаточная функция звена:

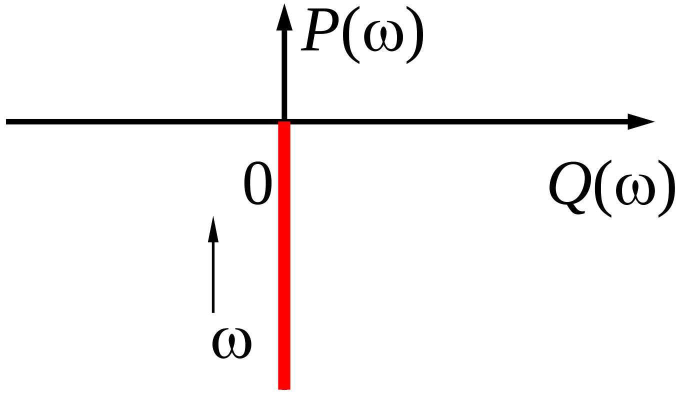
$$y(t) = K\int_0^t x(t)dt \qquad W(p) = \frac{K}{p}$$

Параметр k является коэффициентом передачи звена по скорости и имеет размерность с$^{-1}$.

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

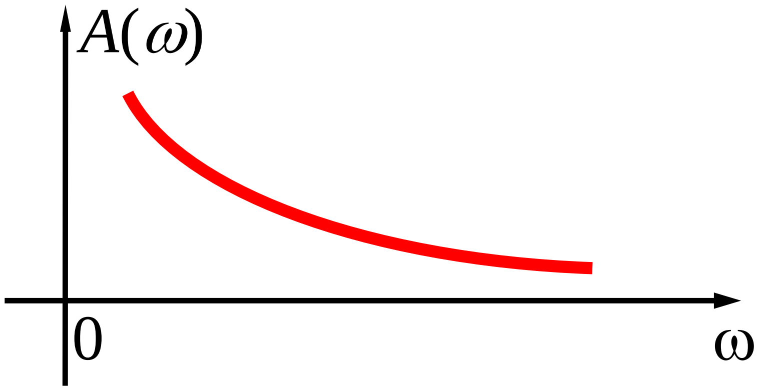
АФЧХ

$$W(j\omega) = -j\frac{K}{\omega}$$



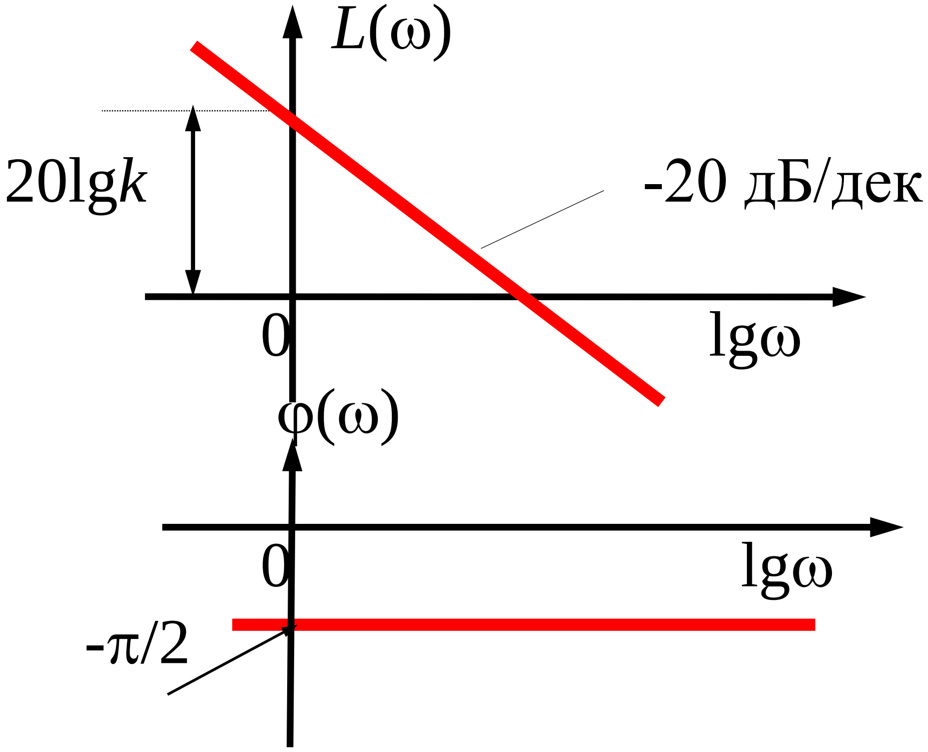
АЧХ

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega}$$



ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega$$

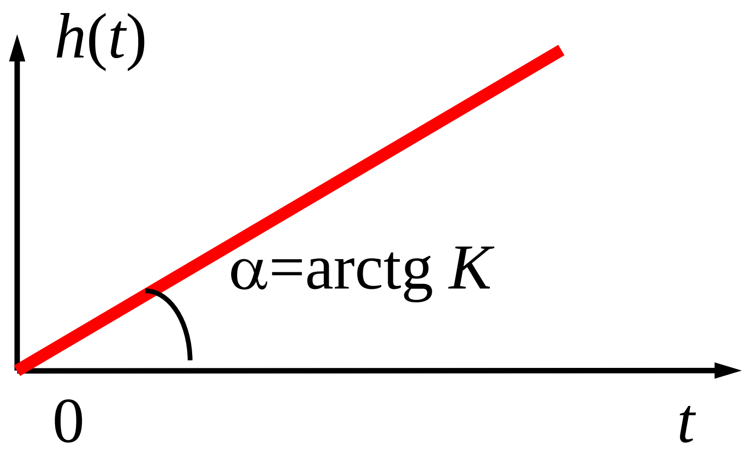


ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2},$$

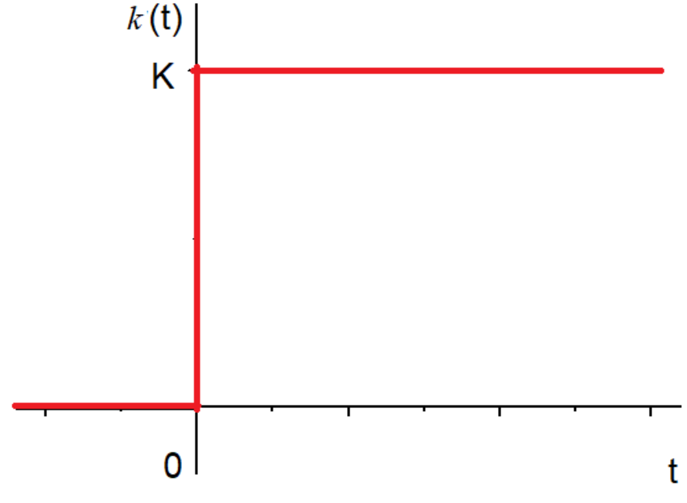
Переходная функция и характеристика

$$h(t) = K \cdot t,$$



Весовая функция

$k(t) = K \cdot 1(t) = (1/T) \cdot 1(t)$



Реальное интегрирующее звено

Динамика процесса в таком звене описывается следующим уравнением:

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}=kx(t)$$

где k – коэффициент усиления.

1. Переходная характеристика:

$$h(t)=k\left(t-T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right)$$

2. Импульсная переходная характеристика:

$$\omega(t)=k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

3. Передаточная функция реального интегрирующего звена:

$$Tp^2y(p)+py(p)=kx(p)$$

$$y(p)(Tp^2+p)=kx(p)$$

$$W(p)=\frac{k}{Tp^2+p}=\frac{k}{p(Tp+1)}$$

4. АФХ:

$$W(j\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^3 + \omega} - j\frac{k}{T^2\omega^3 + \omega}$$

5. АЧХ:

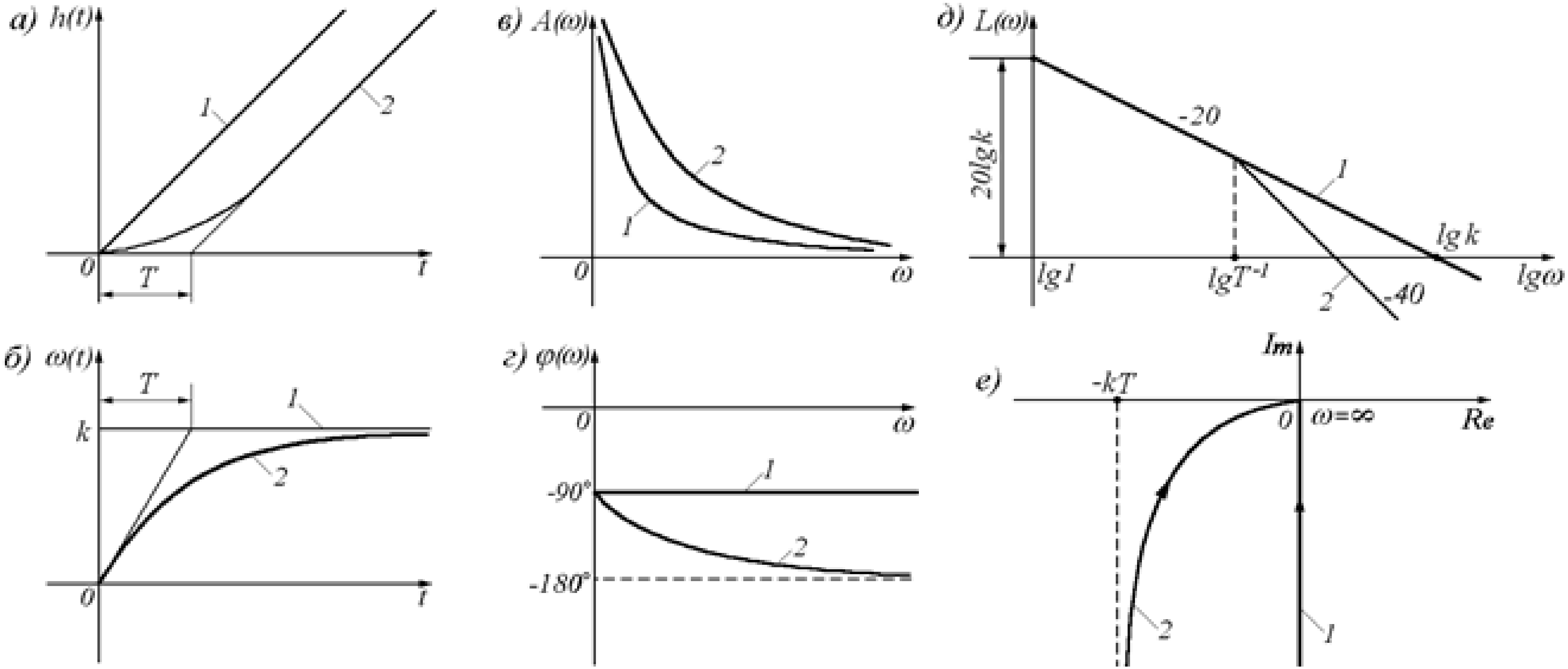
$$A(\omega) = \frac{k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}{T^2\omega^3 + \omega} = \frac{k}{\omega\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

6. ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{1}{T\omega}$$

7. ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$



а) h(t)
1
2
0
T
t
в) A(ω)
2
1
0
ω
д) L(ω)
-20
20lgk
1
lg k
lg1
lgT^-1
lgω
2
-40
б) ω(t)
T
1
k
2
0
t
г) φ(ω)
0
ω
-90°
1
2
-180°
Im
е)
-kT
0
ω=∞
Re
2
1

Идеальное дифференцирующее звено

- Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}, \qquad W(p) = k \cdot p.$$

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициент передачи *k* измеряется в секундах

1. Переходная характеристика: $h(t) = k\delta(t)$

2. Импульсная переходная характеристика:

$$\omega(t) = k\delta'(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \delta'(t) = \begin{cases} \approx 0, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

3. Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = kp$$

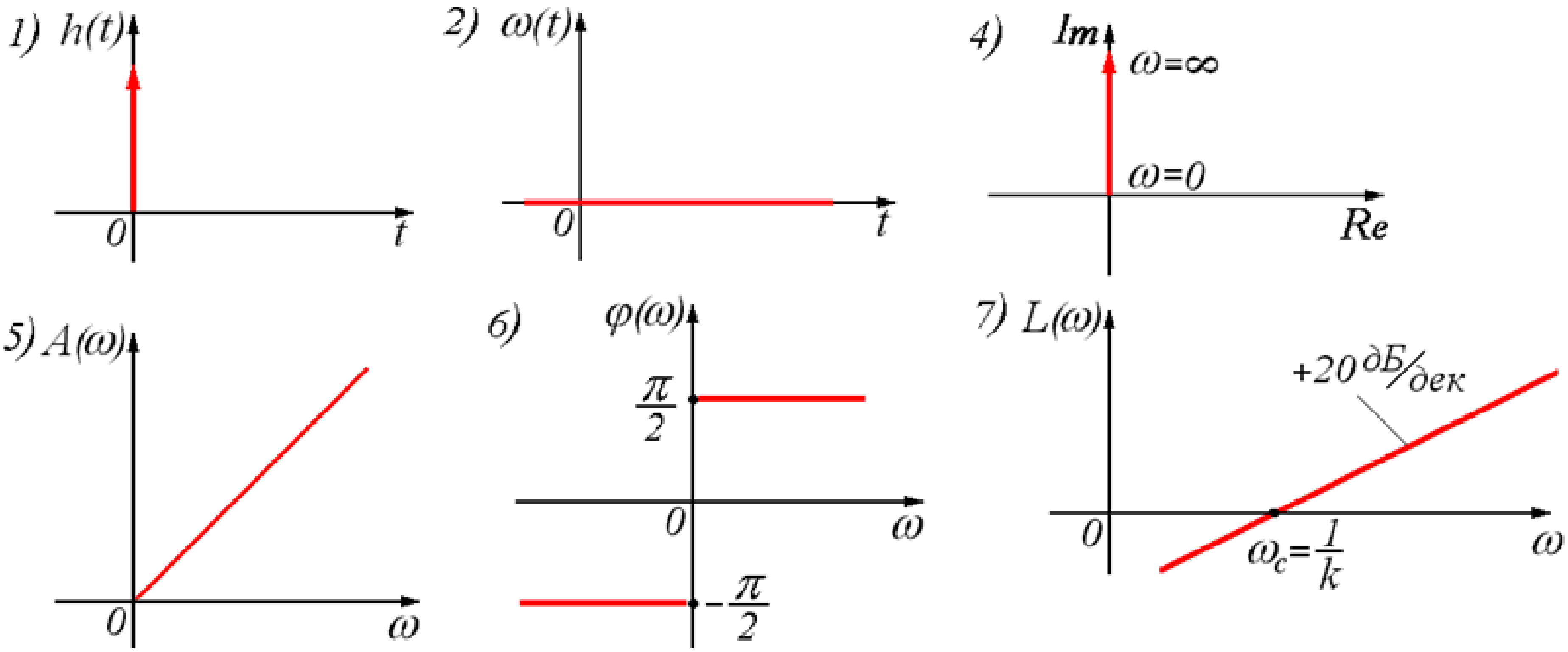
$$y(p) = kx(p) \cdot p$$

4. АФХ: $W(j\omega) = jk\omega$

5. АЧХ: $A(\omega) = k\omega$

6. ФЧХ: $\varphi(\omega) = arctg\frac{k\omega}{0} = arctg\infty = \frac{\pi}{2}$

7. ЛАЧХ звена: $L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega$



1) h(t)
0
t
2) ω(t)
0
t
4) Im
ω=∞
ω=0
Re
5) A(ω)
0
ω
6) φ(ω)
π/2
0
ω
−π/2
7) L(ω)
+20 дБ/дек
0
ω_c=1/k
ω

Реальное дифференцирующее звено

Динамика дифференцирующего звена представлена уравнением

$$T\frac{dy}{dt} + y = k\frac{dx}{dt}$$

1. Переходная характеристика:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \dfrac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot [1(t)], & t \geq 0 \end{cases}$$

2. Импульсная переходная характеристика:

$$\omega(t) = \frac{k}{T}\delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$$

3. Передаточная функция:

$$Tpy(p) + y(p) = kpx(p)$$

$$y(p) \cdot (Tp + 1) = kpx(p)$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{kp}{Tp + 1}$$

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Реальное дифференцирующее звено

4. АФХ:

$$W(j\omega)=\frac{kj\omega}{Tj\omega+1}=\frac{kT\omega^2}{1+T^2\omega^2}+j\frac{k\omega}{1+T^2\omega^2}$$

5. АЧХ:

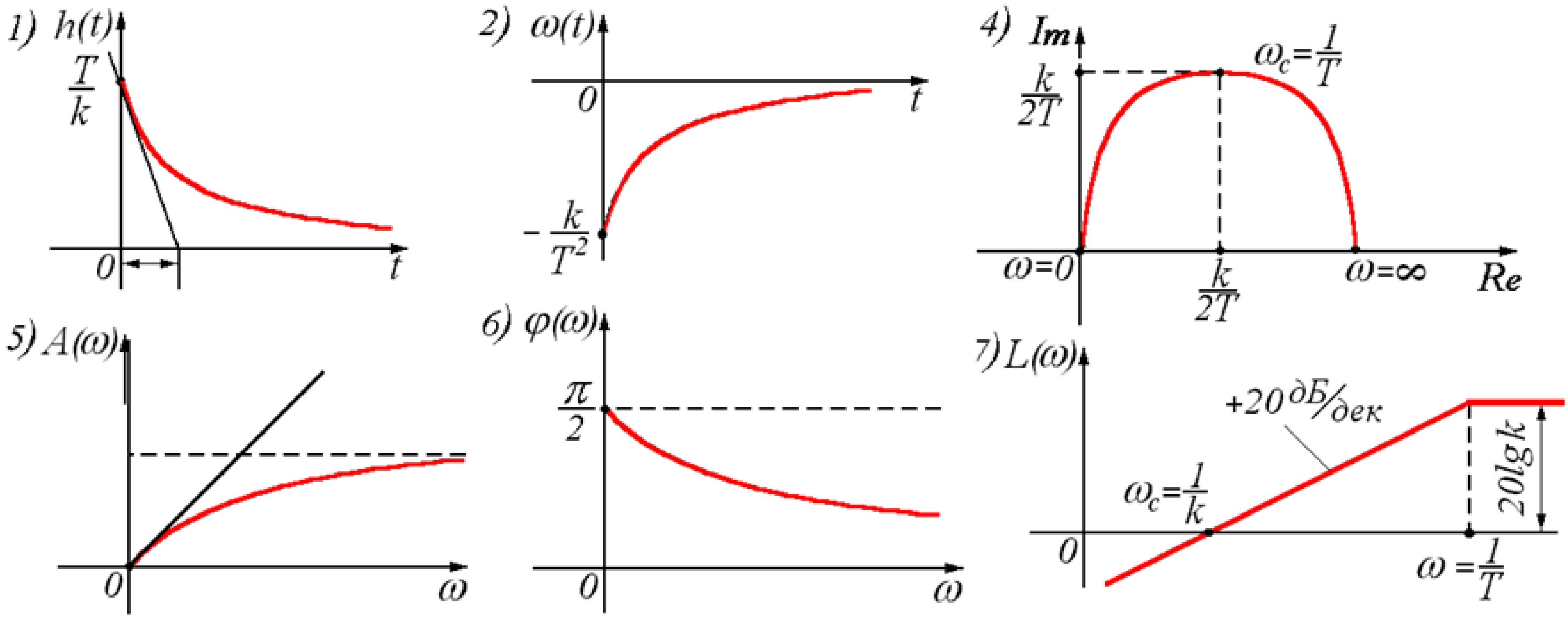
$$A(\omega)=\frac{k\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}{1+T^2\omega^2}=\frac{k\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

6. ФЧХ:

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{k\omega}{kT\omega^2}=arctg\frac{1}{T\omega}$$

7. ЛАЧХ:

$$L(\omega)=20\lg k+20\lg\omega-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$$


1) h(t)
T/k
0
t
2) ω(t)
0
t
-k/T²
4) Im
k/2T
ω_c=1/T
ω=0
k/2T
ω=∞
Re
5) A(ω)
0
ω
6) φ(ω)
π/2
0
ω
7) L(ω)
+20 дБ/дек
ω_c=1/k
0
ω=1/T
20lgk

Форсирующее звено

Передаточная функция

$$W(p) = k(\tau p + 1)$$

где τ – постоянная времени (с)

Частотные функции и характеристики

Частотная передаточная функция и годограф АФЧХ

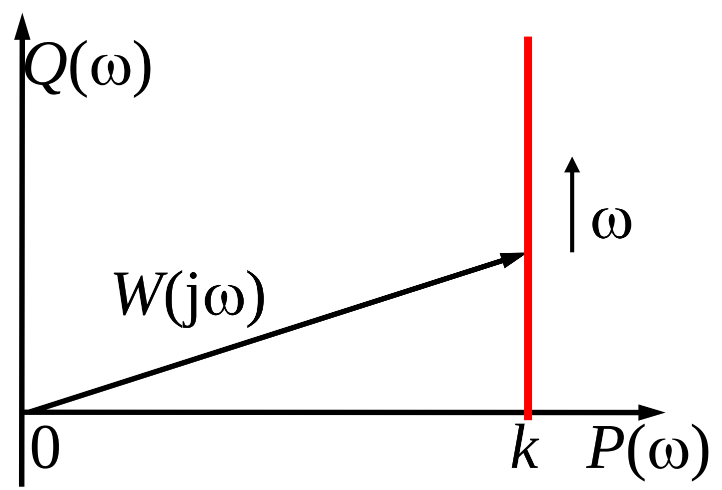
$$W(j\omega) = k(j\tau\omega + 1)$$

ВЧХ

$$P(\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega)] = k$$

МЧХ

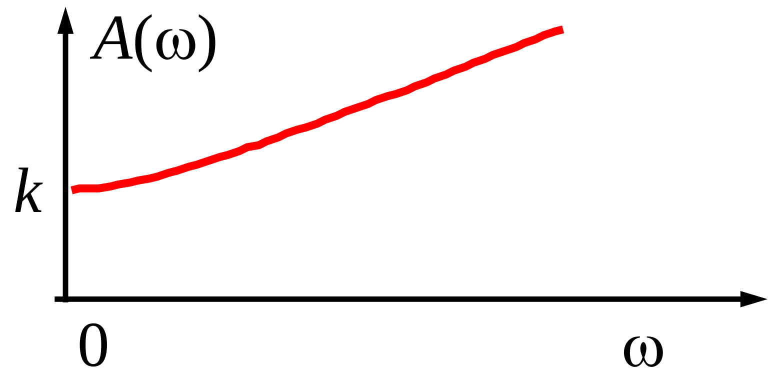
$$Q(\omega) = \mathrm{Im}[W(j\omega)] = k\omega\tau$$



АЧХ

$$A(\omega)=|W(j\omega)|=$$

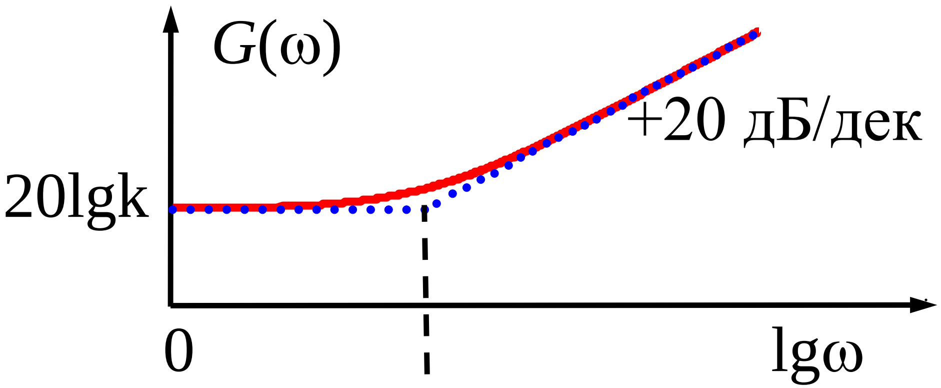
$$=k\sqrt{\omega^2\tau^2+1}$$



ЛАЧХ

$$G(\omega)=20\lg A(\omega)=$$

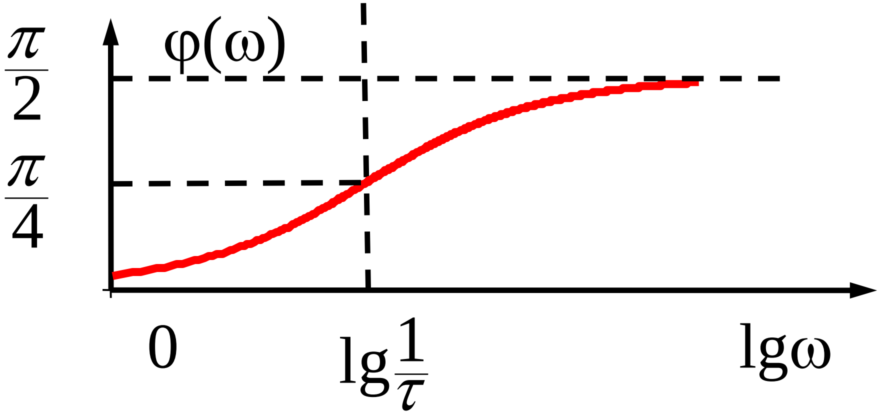
$$=20\lg k+20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2+1}$$



ФЧХ

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=$$

$$=\operatorname{arctg}\omega\tau$$



Переходная функция форсирующего звена

$$h(t) = k\left[\tau\delta(t) + 1\right]$$

Инерционное форсирующее звено

Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{ин}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{Tp + 1}$$

АЧХ

$$A(\omega) = A_{\text{ин}}(\omega) \cdot A_{\text{форс}}(\omega) = \frac{k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

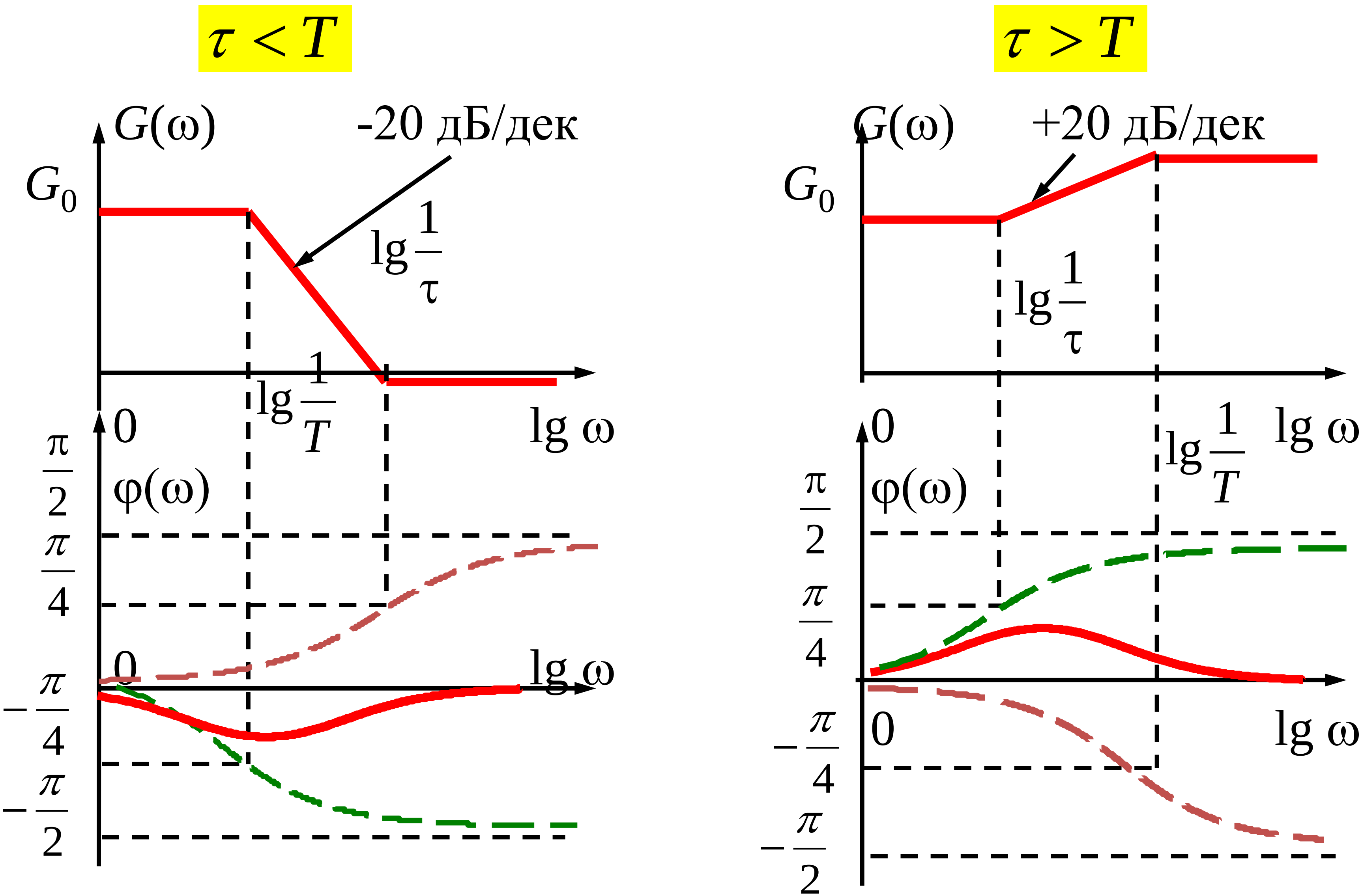
ЛАЧХ

$$G(\omega) = G_{\text{ин}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} - 20\lg\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

ФЧХ

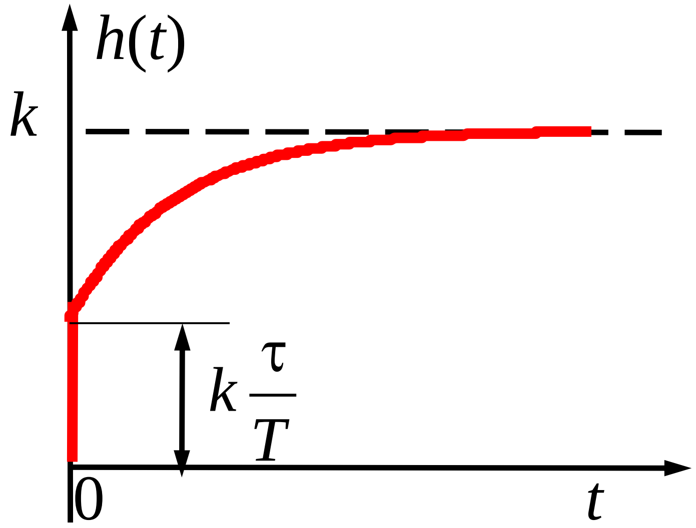
$$\varphi(\omega) = \varphi_{ин}(\omega) + \varphi_{форс}(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega \cdot \tau) - \operatorname{arctg}(\omega \cdot T)$$



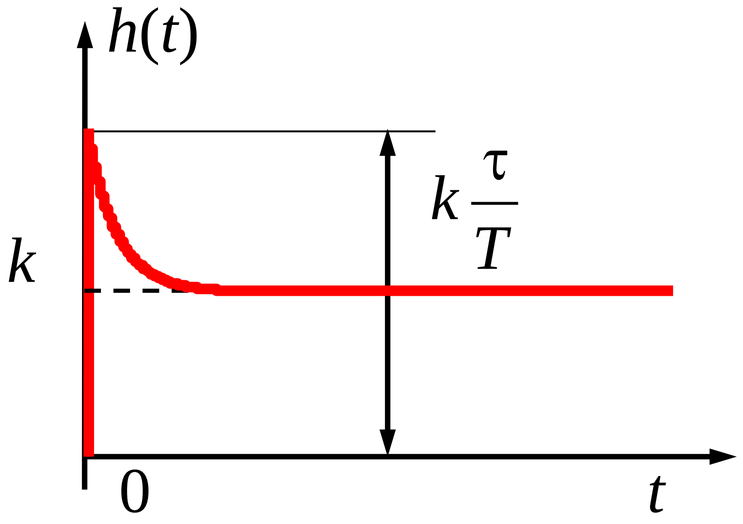
Переходная функция и переходные характеристики инерционного форсирующего звена

$$h(t) = k\left[1 + \left(\frac{\tau}{T} - 1\right)e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

$\tau < T$



$\tau > T$



Изодромное звено

Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{инт}}(p)\cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p+1)}{p}$$

ЛАЧХ

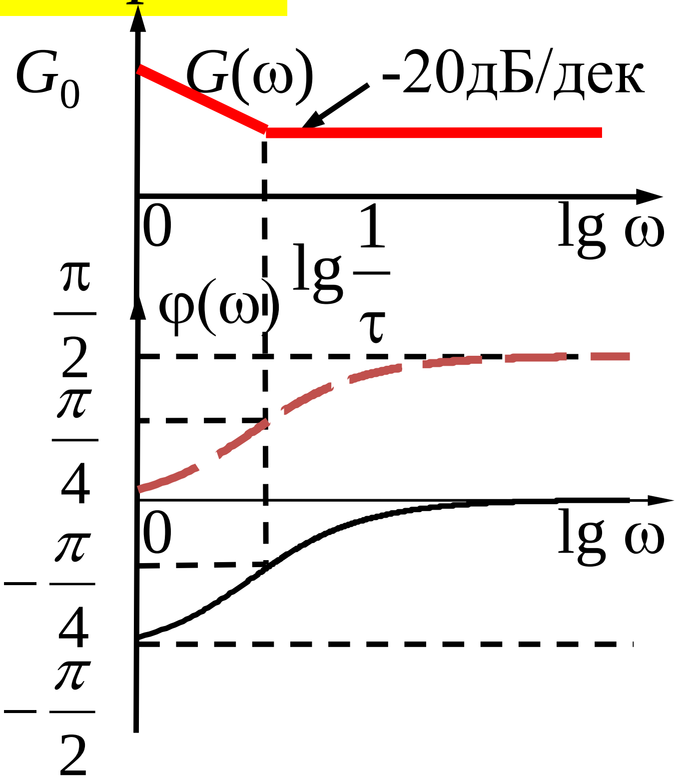
$$G(\omega) = G_{\text{инт}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2+1} - 20\lg\omega$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{инт}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) =$$

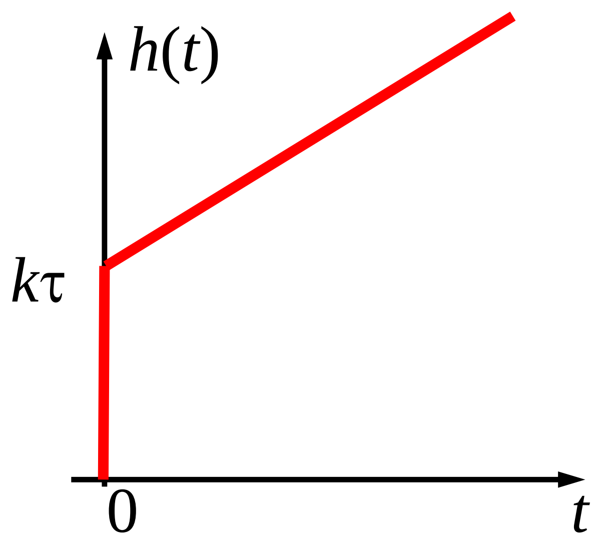
$$= \operatorname{arctg}(\omega\cdot\tau) - \frac{\pi}{2}$$



Переходная функция и переходная характеристика изодромного звена

$$Y(p) = X(p) \cdot W(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p \cdot p} = \frac{B(p)}{p^2}$$

$$h(t) = \frac{d}{dp}\left[B(p)e^{pt}\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{d}{dp}\left[k(\tau p + 1)e^{pt}\right]\Bigg|_{p=0} = k(\tau + t)$$



Звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение звена в оригиналах и изображениях:

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)Y(p) = kX(p).$$

T_1, T_2 – постоянные времени

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Пусть p_1, p_2 – корни характеристического уравнения

$$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = 0$$

Колебательное звено

- p_1, p_2 – комплексные сопряжённые корни с отрицательными вещественными частями

Передаточная функция $W(p) = \dfrac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$

Здесь $T = T_1$

Параметр $\xi = \dfrac{T_2}{2T_1}$ называется коэффициентом демпфирования

Для колебательного звена $0 < \xi < 1$

Для апериодического звена второго порядка $\xi \geq 1$ и корни p_1, p_2 становятся вещественными

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{1-\omega^2T^2 + 2j\xi\omega T} = \frac{k\left(1-\omega^2T^2 - 2j\xi\omega T\right)}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2}$$

ВЧХ

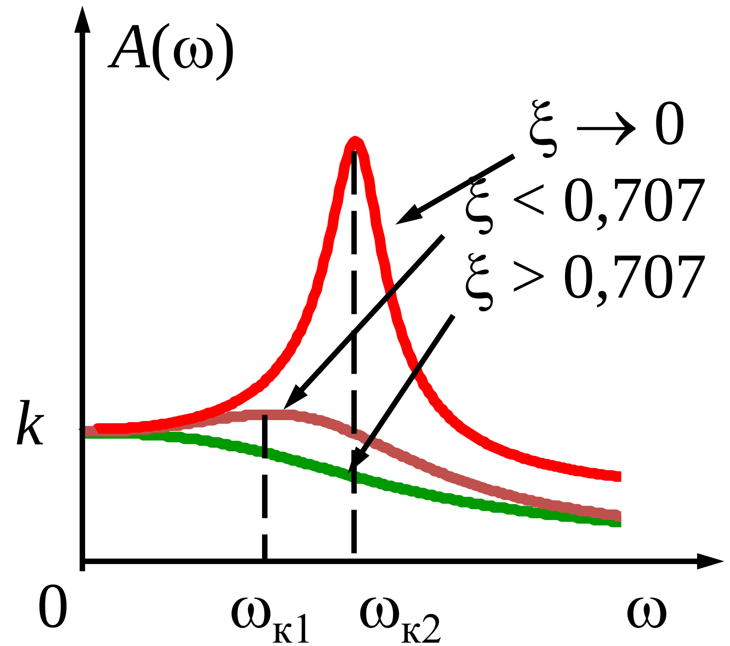
$$P(\omega) = k\frac{1-\omega^2T^2}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2}$$

МЧХ

$$Q(\omega) = -k\frac{2\xi\omega T}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2},$$

АЧХ

$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = \frac{k}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2}}$$



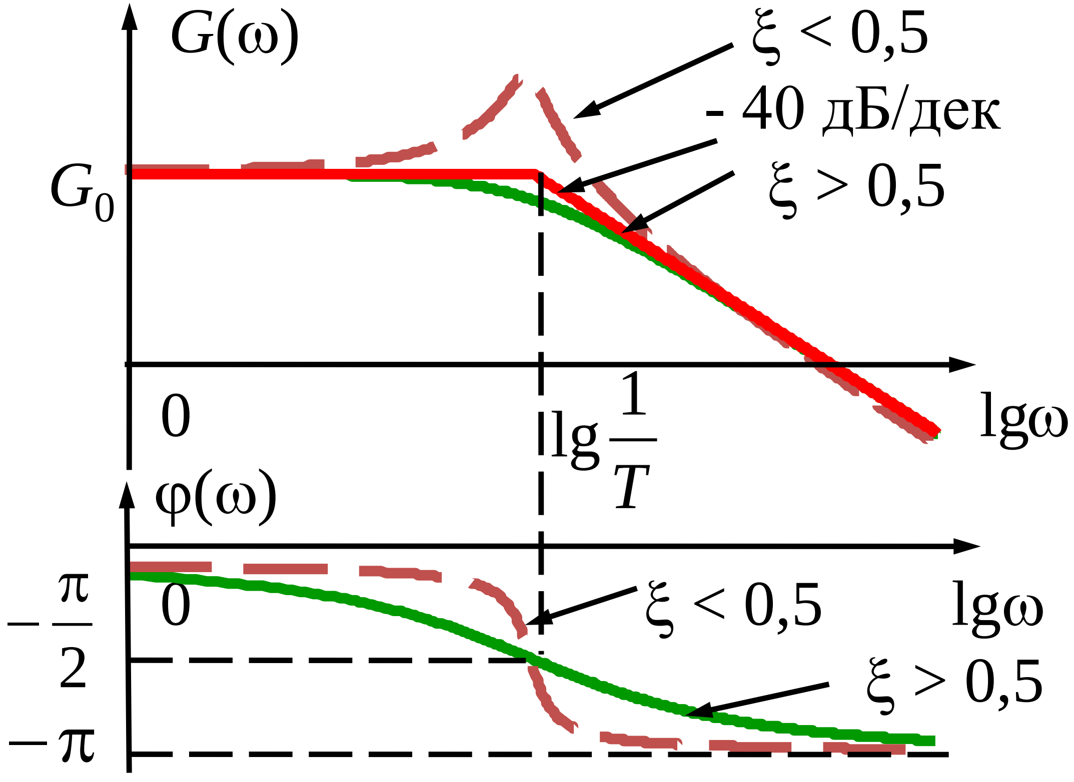
Частота собственных колебаний $\omega_к = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$

ЛАЧХ $G(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2}$

ФЧХ

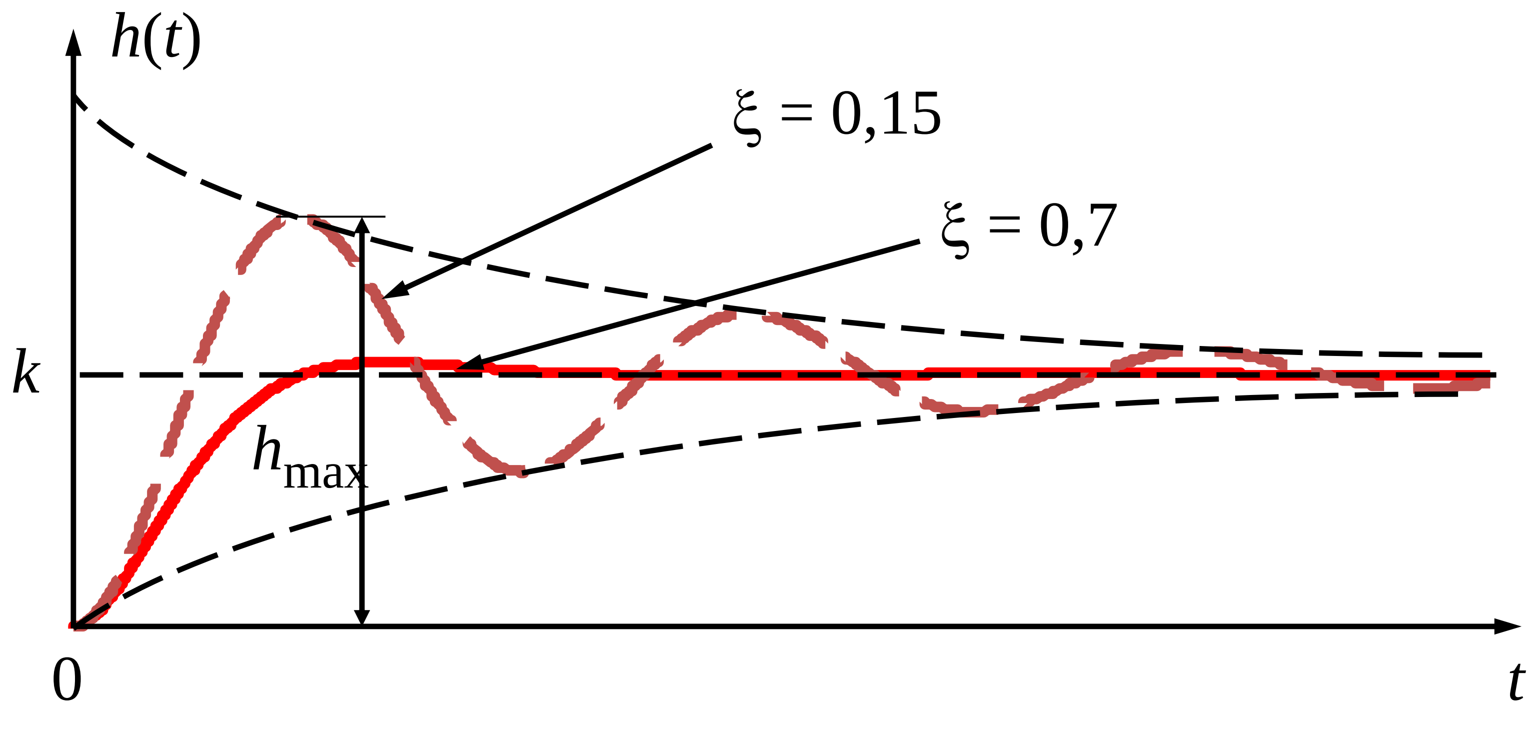
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2T^2}$$



Переходная функция и переходная характеристика колебательного звена

$$h(t) = k\left[1 - e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}}\left(\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right]$$



Апериодическое звено второго порядка

- p_1, p_2 – вещественные отрицательные корни

Передаточная функция

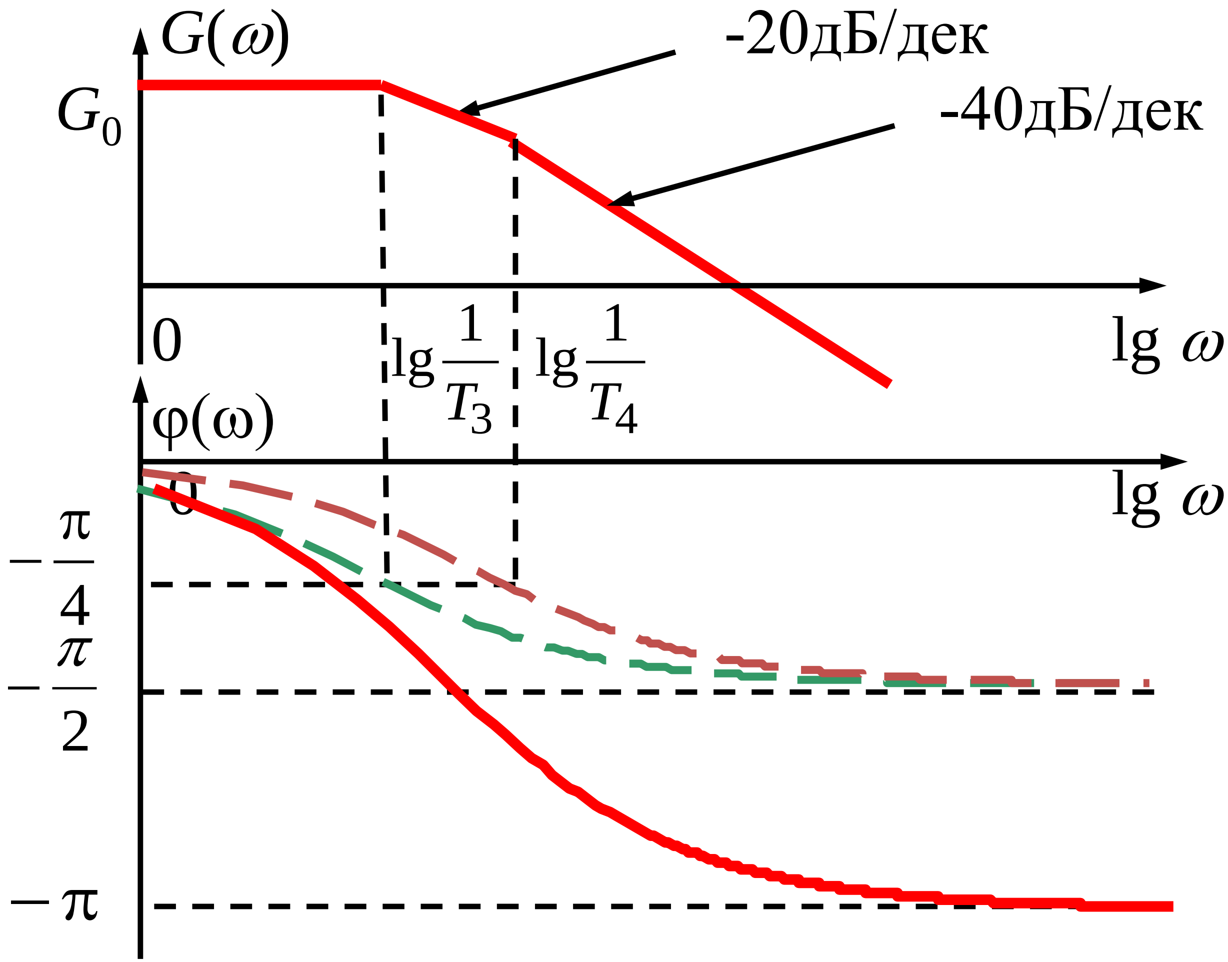
$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

где эквивалентные постоянные времени

$$T_{3,4} = \frac{T_2}{2} \pm \sqrt{\frac{T_2^2}{4} - T_1^2}$$

- Апериодическое звено второго порядка есть <u>последовательное соединение двух инерционных звеньев</u> с постоянными времени T_3, T_4, поэтому его ЛАЧХ и ЛФЧХ – *сумма* ЛАЧХ и ЛФЧХ этих звеньев

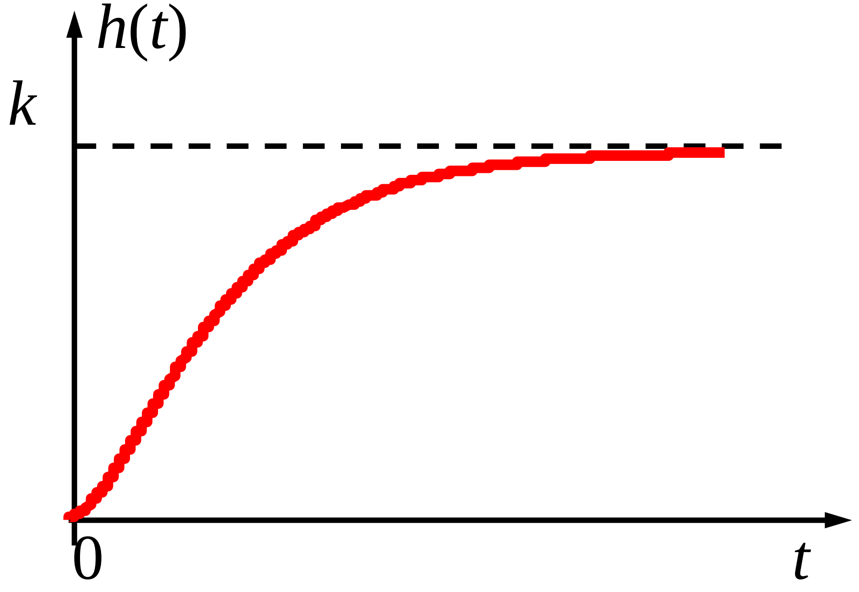
ЛАЧХ и ЛФЧХ



$G(\omega)$
-20дБ/дек
-40дБ/дек
G_0
0
$\lg \frac{1}{T_3}$
$\lg \frac{1}{T_4}$
$\lg \omega$
$\varphi(\omega)$
0
$\lg \omega$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

Переходная функция и переходная характеристика апериодического звена второго порядка

$$h(t) = k\left[1 + \frac{T_3}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_4}}\right].$$



Консервативное звено

- p_1, p_2 – мнимые сопряжённые корни, что соответствует $\xi = 0$

Передаточная функция $$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$$

Частотная передаточная функция $$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$$

АЧХ $$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$$

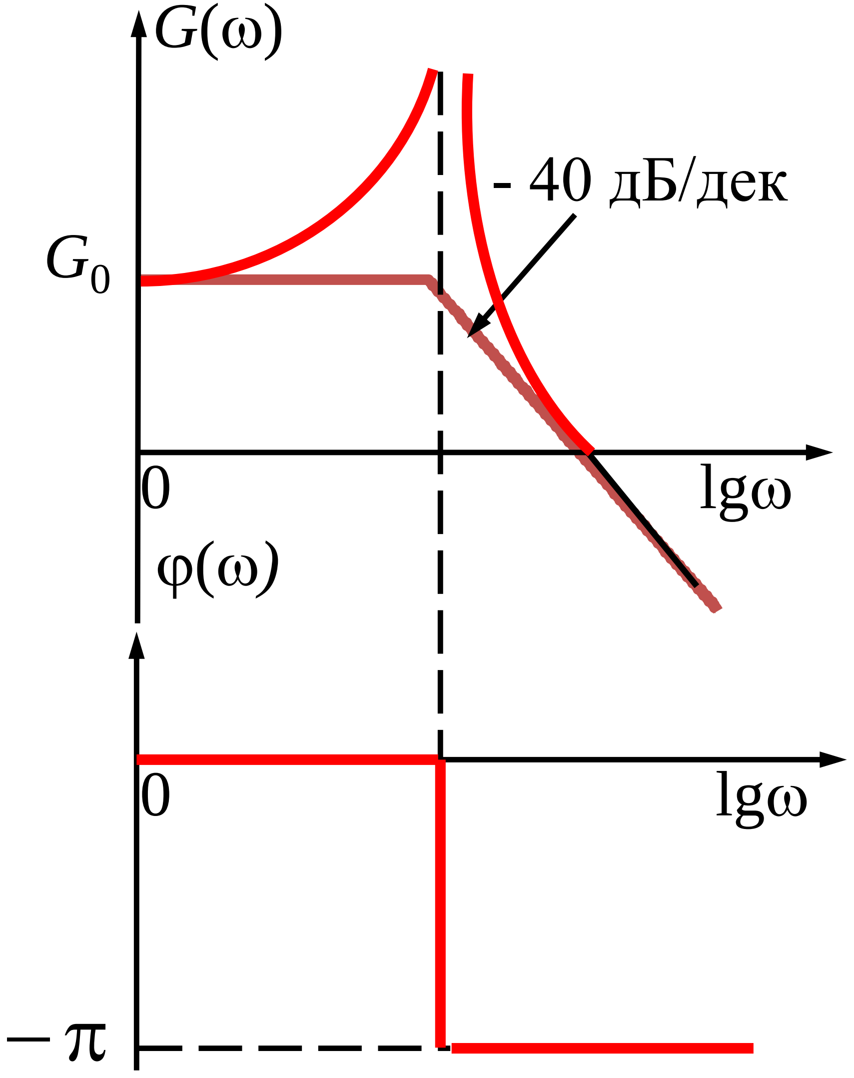
АЧХ $$G(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1 - \omega^2 T^2}$$

ФЧХ

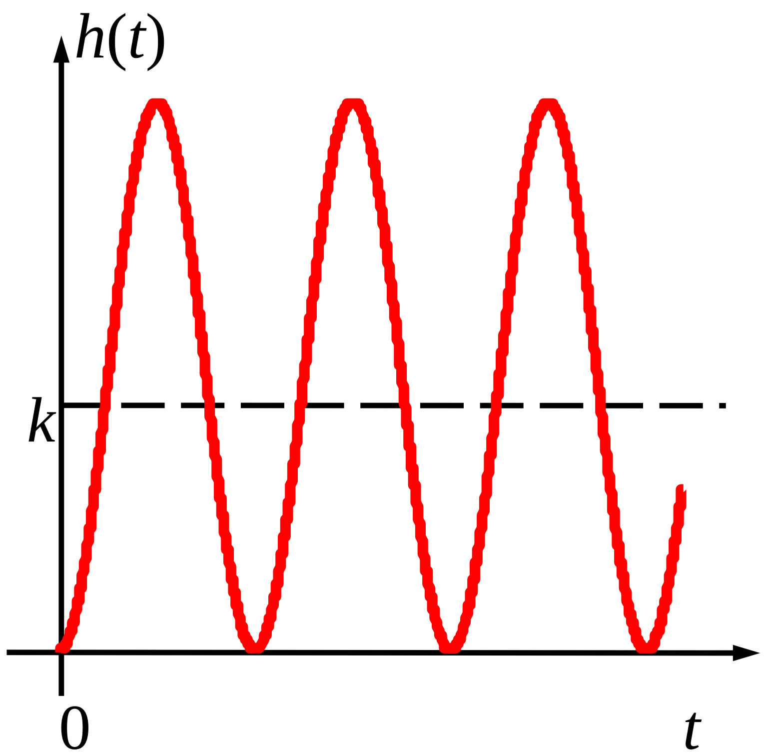
$$\varphi(\omega) = -\lim_{\xi \to 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \omega < \dfrac{1}{T}, \\ -\pi \quad \text{при} \quad \omega \geq \dfrac{1}{T}. \end{cases}$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ

Переходная функция и ереходная характеристика



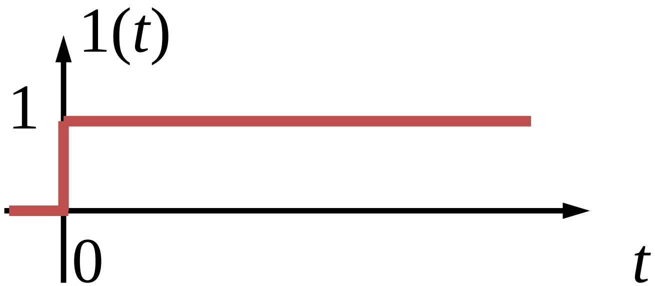
$$h(t) = k\left(1 - \cos\frac{t}{T}\right)$$

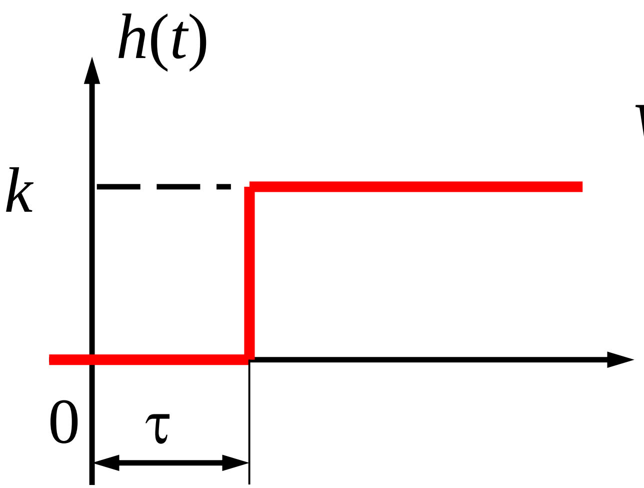


Звено чистого запаздывания

Понятие запаздывания и переходная характеристика звена

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau)$$





Передаточная функция

$$W(p) = ke^{-p\tau}.$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = ke^{-j\omega\tau} = k[\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)]$$

ВЧХ МЧХ

$$P(\omega) = k\cos(\omega\tau) \qquad Q(\omega) = -k\sin(\omega\tau)$$

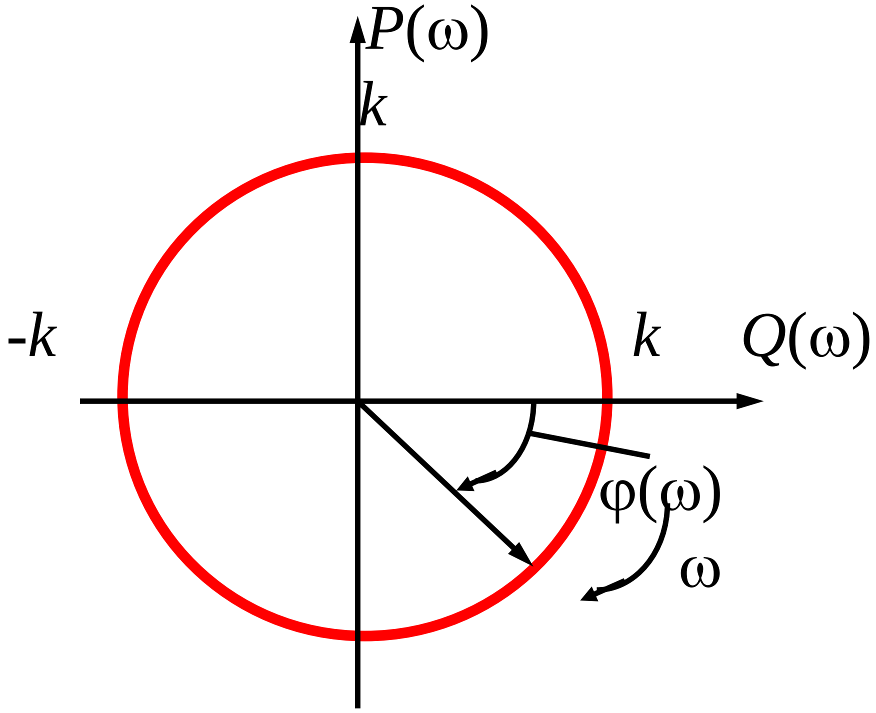
АЧХ

$$A(\omega) = k\sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = k,$$

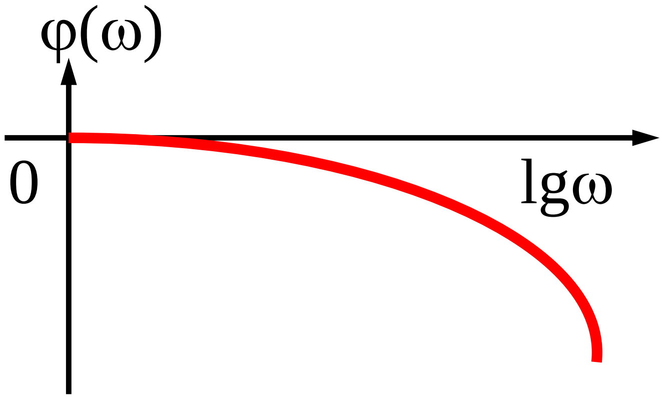
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{-\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = -\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}(\omega\tau)\right] = -\omega\tau.$$

Годограф АФЧХ



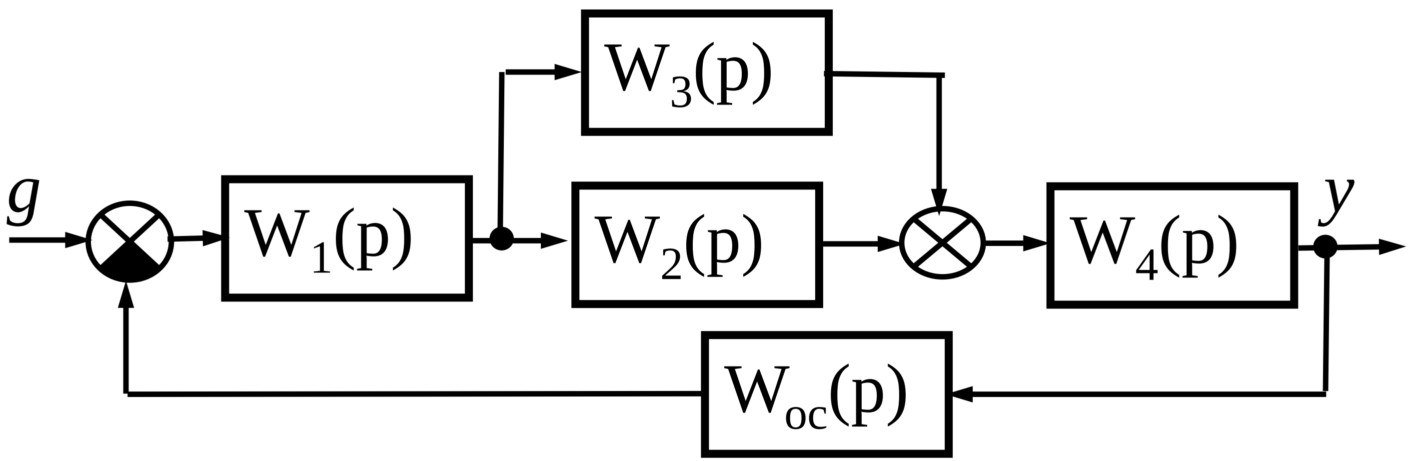
ЛФЧХ



Структурные схемы САУ. Основные правила преобразования структурных схем

Структурная схема САУ – это графическое изображение её математического описания

Пример структурной схемы



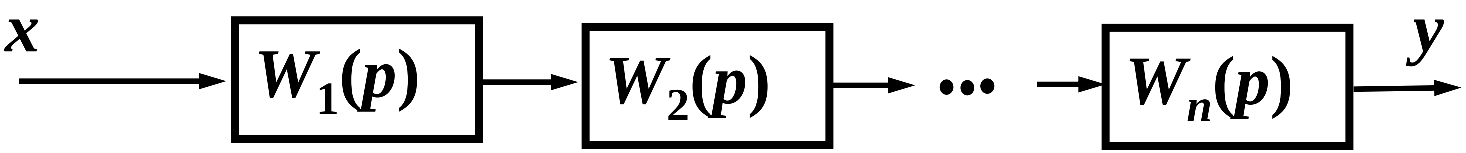
Преобразование структурных схем

Имеются три типа соединений динамических звеньев:

- - последовательное;
- - параллельное;
- - встречно-параллельное (соединение в виде обратной связи).

Основные правила преобразования структурных схем

- Последовательное соединение звеньев



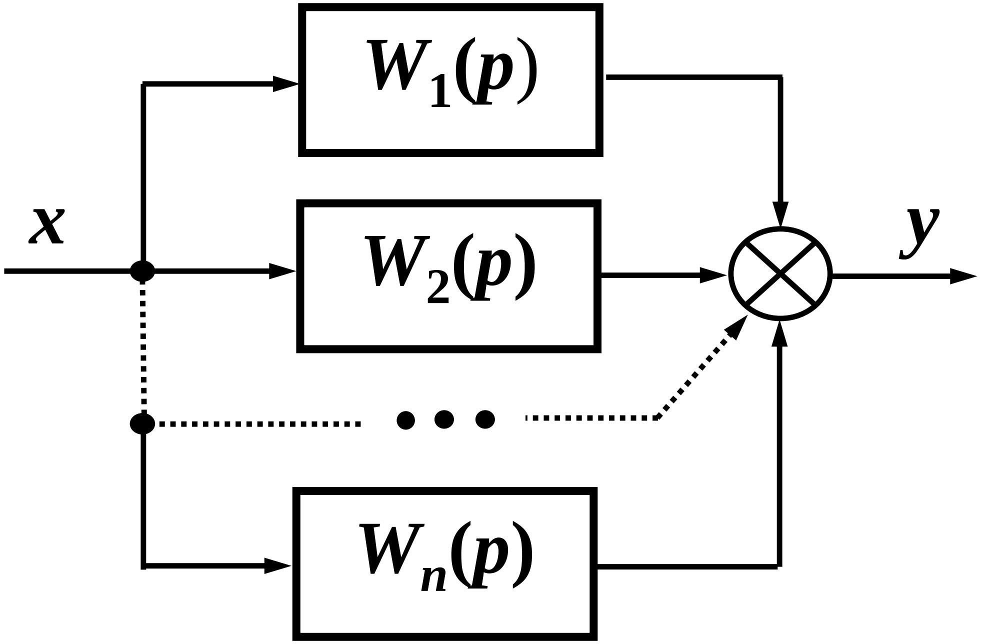
Эквивалентная передаточная функция

$$W_э(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)$$

При последовательном соединении звеньев их передаточные функции **перемножаются**

Основные правила преобразования структурных схем

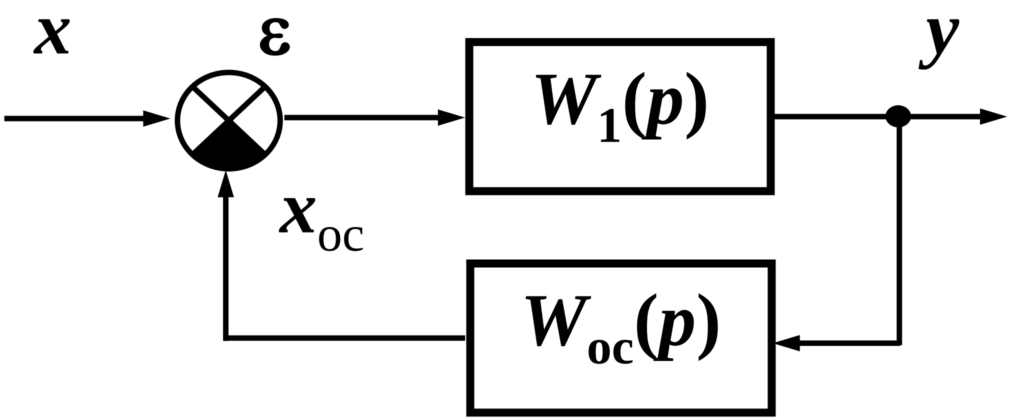
- Параллельное соединение звеньев



$$W_э(p) = \sum_{i=1}^{m} W_i(p)$$

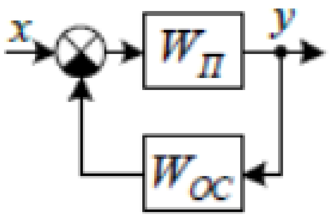
При параллельном соединении звеньев их передаточные функции **суммируются**

- Охват звена обратной связью



$$\varepsilon(t) = x(t) - x_{oc}(t)$$

$$W_э(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{oc}(p) \cdot W_1(p)}$$



При положительной обратной связи знак “плюс” в знаменателе меняется на “минус”, т.е.

$$W_э(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_{oc}(p) \cdot W_1(p)}$$