Непрерывно-стохастические модели Q-схемы

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Системы массового обслуживания

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания

это математическая теория, ставящая целью изучение систем массового обслуживания (СМО).

В сфере производства и обслуживания примерами СМО могут служить:

различные системы связи (в том числе телефонные станции),

погрузочно-разгрузочные комплексы (порты, товарные станции),

автозаправочные станции,

пункты пропуска через границу,

пункты таможенного оформления,

парикмахерские, билетные кассы,

пункты обмена валюты, ремонтные мастерские, больницы и т.д.

- Такие системы как компьютерные сети, системы сбора, хранения и обработки информации, транспортные системы, автоматизированные производственные участки и, в военной области, системы противовоздушной или противоракетной обороны также могут рассматриваться как своеобразные СМО.

Теория массового обслуживания начала развиваться в начале XX столетия.

- Основоположником теории массового обслуживания считается датский ученый Агнер Краруп Эрланг.

В 1909 г. Эрланг применил теорию вероятностей к исследованию зависимости обслуживания телефонных вызовов от числа поступивших на телефонную станцию вызовов.

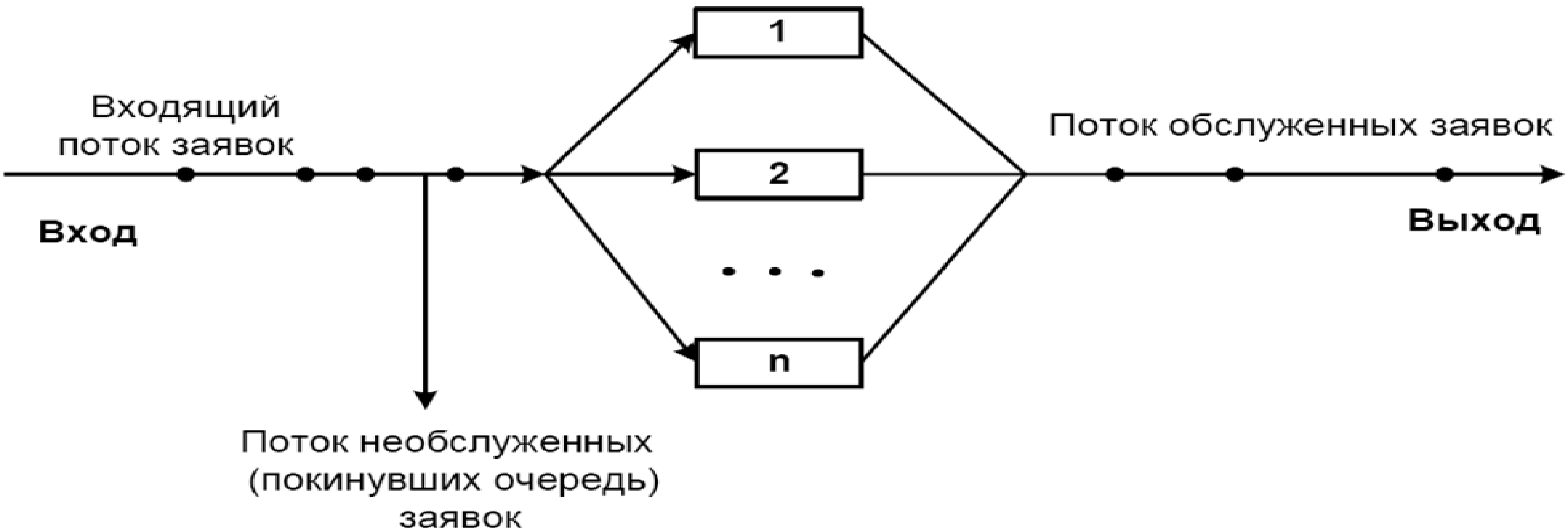
Каждая СМО включает в свою структуру некоторое число обслуживающих устройств (пунктов, приборов, линий), которые называют *каналами обслуживания*. Роль каналов могут играть лица, выполняющие те или иные операции линии связи, автомашины, краны, ремонтные бригады, железнодорожные пути, бензоколонки.

Каждая СМО предназначена для обслуживания (выполнения) некоторого *потока заявок* (или *требований*), поступающих на вход системы большей частью не регулярно, а в случайные моменты времени.

Концептуальное представление СМО

Обслуживание заявок, в общем случае, также длится не постоянное, заранее известное, а случайное время. После обслуживания заявки канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока и времени их обслуживания приводит к неравномерной загруженности СМО: в некоторые промежутки времени на входе СМО могут скапливаться необслуженные заявки (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными), в другие же периоды при свободных каналах на входе СМО заявок не будет, что приводит к недогрузке СМО, т.е. к простаиванию каналов.

Схема СМО изображена на рисунке.

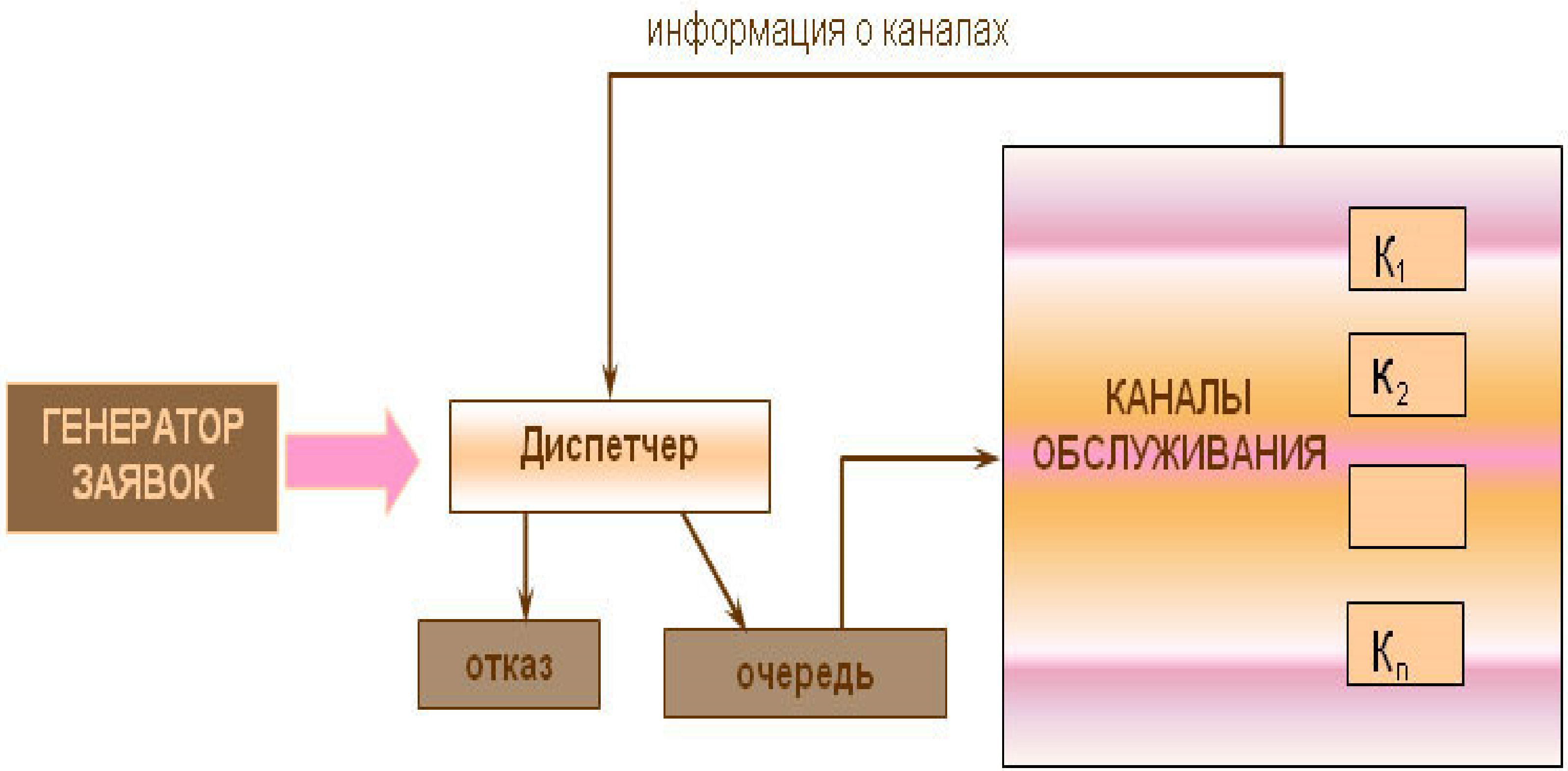


Таким образом, во всякой СМО можно выделить следующие основные элементы:

1) входящий поток заявок;
2) очередь;
3) каналы обслуживания;
4) выходящий поток обслуженных заявок.

Каждая СМО в зависимости от своих параметров: характера потока заявок, числа каналов обслуживания и их производительности, а также от правил организации работы, обладает определенной эффективностью функционирования (пропускной способностью), позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок.

Схема СМО


информация о каналах
ГЕНЕРАТОР ЗАЯВОК
Диспетчер
отказ
очередь
КАНАЛЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ
K_1
K_2
K_n

- *Задачи теории массового обслуживания,* - установление зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров):

- характера потока заявок,
- числа каналов и их производительности
- и правил работы СМО.

Классификация СМО

По дисциплине обслуживания СМО подразделяют на три класса

1. СМО с отказами. Заявка, поступившая на вход СМО в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ» и покидает СМО.

Чтобы эта заявка все же была обслужена, она должна снова поступить на вход СМО и рассматриваться при этом как заявка, поступившая впервые.

2. **СМО *с ожиданием*** (*неограниченным ожиданием* или *очередью*).

В таких системах заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения канала, который примет ее к обслуживанию.

3. СМО смешанного типа *(с ограниченным ожиданием)*.

Это такие системы, в которых на пребывание заявки в очереди накладываются некоторые ограничения.

Ограничения ожидания могут касаться *времени пребывания заявки в очереди*, по истечению которого она выходит из очереди и покидает систему, либо касаться *общего времени пребывания заявки в* СМО

Характеристики СМО

Плотность потока - λ

Пропускная способность – μ

Интенсивность обслуживания - ψ

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

k – число каналов

Среднее время обслуживания заявки:

$$\bar{T}_S = k / \mu$$

Среднее время простоя канала:

$$\bar{T}_{st} = k / \lambda$$

Показатели эффективности работы СМО

Относительная пропускная способность $Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Абсолютная пропускная способность $A=\lambda Q$

Средняя продолжительность периода занятости СМО.

Коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок.

Показатели эффективности обслуживания заявок

Среднее время ожидания заявки в очереди - $\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda$

Среднее время пребывания заявки в СМО - $\bar{T}_{sys} = \bar{N}_{sys} / \lambda$

Вероятность отказа заявки в обслуживании без ожидания;

Вероятность немедленного приема заявки;

Закон распределения времени ожидания заявки в очереди в СМО;

Среднее число заявок в очереди - $\bar{N}_{line} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$

Среднее число заявок, находящихся в СМО - $\bar{N}_{sys} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Потери от простоя:

$C_{пр}$ – потери от простоя прибора обслуживания

$C_{тр}$ – потери от простоя в очереди

$$C_{\Sigma}^{пр} = C_{пр} p_0 + \bar{N}_{line} C_{тр} \to \min$$

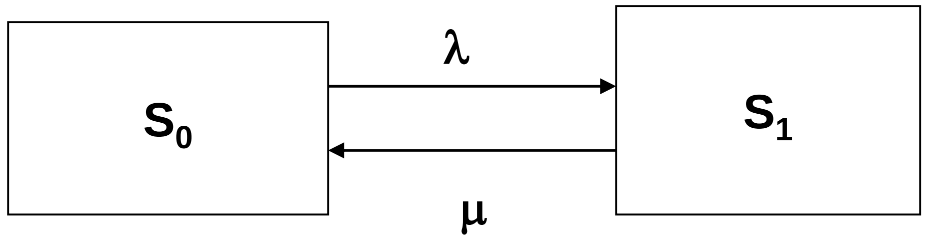
$$\psi_{опт} = \frac{\lambda}{\mu_{опт}} = 1 - \sqrt{\frac{C_{тр}}{C_{пр} + C_{тр}}}$$

Показатели эффективности СМО

среднее число заявок, которые система может обслужить за единицу времени;
средняя доля (или процент) необслуженных заявок, покинувших систему;
среднее время ожидания заявки в очереди;
среднее время пребывания заявки в системе;
среднее число заявок, находящихся в системе;
среднее число заявок в очереди;
относительная и абсолютная пропускные способности СМО
вероятность отказа заявки в обслуживании без ожидания;
вероятность немедленного приема заявки.

Одноканальная СМО с отказами

Граф состояний СМО



Разомкнутая СМО

$$p_0 = \mu / (\lambda + \mu);$$

$$p_1 = \lambda / (\lambda + \mu).$$

Одноканальная СМО с отказами

Замкнутая СМО

Интенсивность обслуживания одного прибора – ψ_1

$$p_0 = \frac{1}{1 + m! \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_1^i}{(m-i)!}}$$

$$\bar{N}_{line} = m - (1 - p_0) \cdot \frac{1 + \psi_1}{\psi_1}$$

$$\psi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} \qquad \lambda_1 = \frac{1}{t_p}$$

$$\bar{N}_{sys} = m - \frac{1 - p_0}{\psi_1}$$

m – общее число требований в системе, участвующих в процессе

Пример

Задана система "экскаватор – самосвалы" в составе одного экскаватора и 5 самосвалов. Экскаватор погружает за один рабочий цикл 50 $м^3$/час грунта. Грузоподъемность самосвала равна 5 $м^3$. Время обращения самосвала равно 1 час. Определить основные параметры работы заготовительно-транспортного подразделения. Рассчитать оптимальный состав заготовительно-транспортного подразделения, при котором суммарные потери от простоев техники будут наименьшими. Стоимость простоя экскаватора составляет 450 у.е./час, а самосвала - 150 у.е./час.

Пример

$$\mu = 10\,\frac{\text{авт}}{\text{ч}} \qquad \lambda = 5\,\frac{авт}{час}$$

Пример

Экскаватор погружает за один рабочий цикл 50 м^3/час грунта. Грузоподъемность самосвала равна 5 м^3. Время обращения самосвала равно 1 час.

Рассчитать оптимальный состав заготовительно-транспортного подразделения, при котором суммарные потери от простоев техники будут наименьшими.

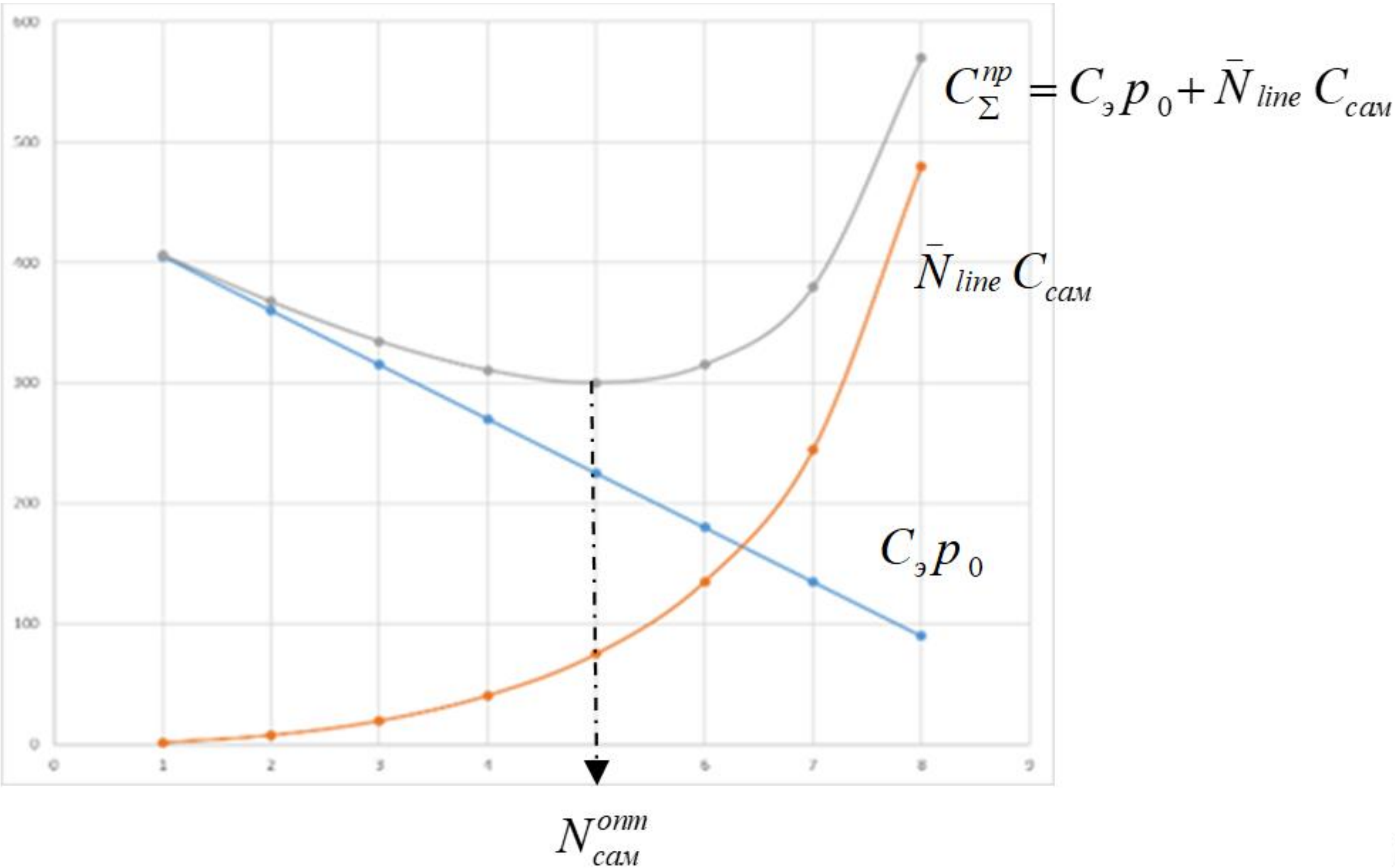
Стоимость простоя экскаватора составляет 450 у.е./час, а самосвала - 150 у.е./час.

Пример

Число самосвалов	$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$	p_0	$C_э p_0$	$\bar{N}_{line}$	$\bar{N}_{line} C_{сам}$	$C_{\Sigma}^{пр} = C_э p_0 + \bar{N}_{line} C_{сам}$
1	0,1	0,9	405	0,01	1,5	406,5
2	0,2	0,8	360	0,05	7,5	367,5
3	0,3	0,7	315	0,13	19,5	334,5
4	0,4	0,6	270	0,27	40,5	310,5
5	0,5	0,5	225	0,5	75	300
6	0,6	0,4	180	0,9	135	315
7	0,7	0,3	135	1,63	244,5	379,5
8	0,8	0,2	90	3,2	480	570

$$p_0 = \mu / (\lambda + \mu)$$

Пример



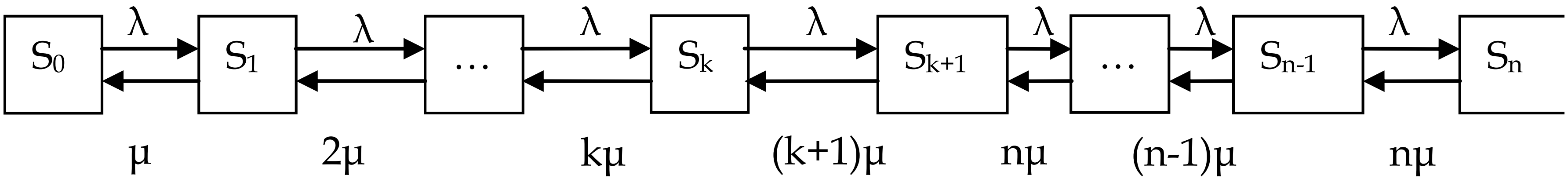
Пример

Экскаватор погружает за один рабочий цикл 50 м^3/час грунта. Грузоподъемность самосвала равна 5 м^3. Время обращения самосвала равно 0,3 час. Рассчитать оптимальный состав заготовительно-транспортного подразделения, при котором суммарные потери от простоев техники будут наименьшими. Стоимость простоя экскаватора составляет 450 у.е./час, а самосвала - 150 у.е./час.

$$\psi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} \qquad \lambda_1 = \frac{1}{t_p}$$

t_p - время обращения самосвала

Многоканальная СМО с отказами



$$p_o = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{n} \psi^i / i!\right)},$$

$$p_k = \frac{p_0 \psi^k}{k!}, k = 1, \ldots, n$$

Основные характеристики СМО

Отказ в обслуживании заявки

$$p_{отк} = p_n = \frac{p_0 \psi^n}{n!}$$

Вероятность обслуживания заявки

$$p_s = 1 - p_{отк} = 1 - p_n$$

Относительная пропускная способность

$$Q = p_s$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - p_n)$$

Основные характеристики СМО

Среднее число занятых каналов

$$\bar{K} = \bar{N}_{sys} = \frac{A}{\mu} = \psi(1 - p_n) = \frac{\lambda(1 - p_n)}{\mu}$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\overline{T}_{sys} = \frac{\overline{N}_{sys}}{\lambda}$$

Пример

Пусть транспортное подразделение в карьере обслуживают два экскаватора, каждый из которых с определенной вероятностью может выйти из строя. Отказавший экскаватор сразу же начинают ремонтировать. По окончанию ремонта он немедленно включается в процесс погрузки.

Пример

В карьере работают два экскаватора, характеристики которых приведены в таблице. Определить размер месячной отгрузки материала при среднем числе рабочих дней, равном 24.

Номер экскаватора	Производительность $П_э$, м^3/смена	Число поломок в месяц λ_i	Число ремонтов, которые можно провести в месяц, μ_i
1	700	1	2
2	475	2	3

Пример

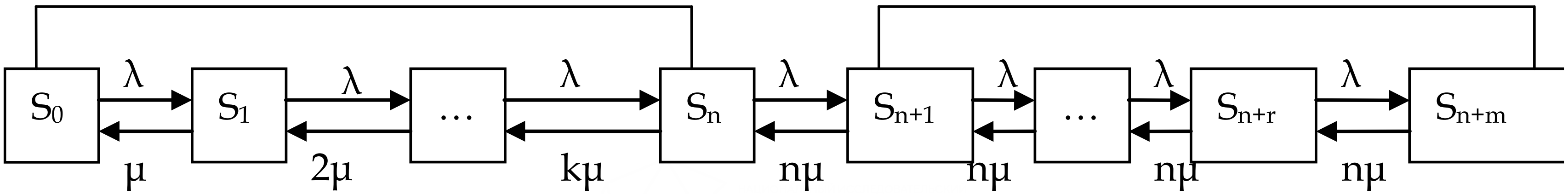
Обосновать целесообразность замены второго экскаватора на новый производительностью 500 м^3 в смену, имеющий меньшую трудоемкость ремонта (в течение месяца можно провести пять ремонтов) и в два раза меньшую по сравнению с заменяемым экскаватором частоту отказов (одна поломка в месяц).

Номер экскаватора	Производительность $П_э$, м^3/смена	Число поломок в месяц λ_i	Число ремонтов, которые можно провести в месяц, μ_i
1	700	1	2
2	500	1	5

Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди

Граф состояний *n*-канальной СМО с ограничением на длину очереди *m*

Очереди нет Очередь есть



S_0 (канал свободен),

S_1 (1 канал занят, остальные работают),

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

…

S_n (каналы заняты),

S_{n+1} (каналы заняты, в очереди одна заявка),

S_{n+2} (каналы заняты, в очереди две заявки),

…,

S_{n+m} (каналы заняты, в очереди *m* заявок).

Вероятности состояний

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi^k}{k!} + \frac{\psi^n}{n!} \frac{\frac{\psi}{n} - \left(\frac{\psi}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\psi}{n}} \right)^{-1}$$

$$p_k = \begin{cases} (\psi^k / k!)\, p_0, k = 1, 2, \ldots, n; \\ (\psi^k / n^{k-n} n!)\, p_0, k = n+1, \ldots, n+m \end{cases}$$

Основные характеристики СМО

Вероятность отказа:

$$p_{отк} = p_{n+m} = \left(\psi^{n+m} / n^m n!\right) p_0$$

Вероятность приема заявки:

$$p_{sys} = Q = 1 - p_{отк} = 1 - \left(\psi^{n+m} / n^m n!\right) p_0$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - \left(\psi^{n+m} / n^m n!\right) p_0 \right]$$

Основные характеристики СМО

Среднее число занятых каналов

$$\bar{N}_s = A/\mu = \rho Q = \psi\left[1 - \frac{\psi^{n+m}}{n^m n!} p_0\right]$$

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{N}_{line} = \begin{cases} \left(\psi^{n+1}/nn!\right) \dfrac{1 - \dfrac{\psi^m}{n^m}\left(m+1-m\dfrac{\psi}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{\psi}{n}\right)^2} p_0, \psi \neq n; \\ \dfrac{1}{nn!}\dfrac{m(m+1)}{2} p_{0,}\psi = n. \end{cases}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе

$$\bar{N}_{sys} = \bar{N}_{line} + \bar{N}_s$$

Основные характеристики СМО

Среднее время обслуживания заявки

$$\bar{T}_s = \bar{N}_s / \lambda$$

Среднее время ожидания заявки в очереди

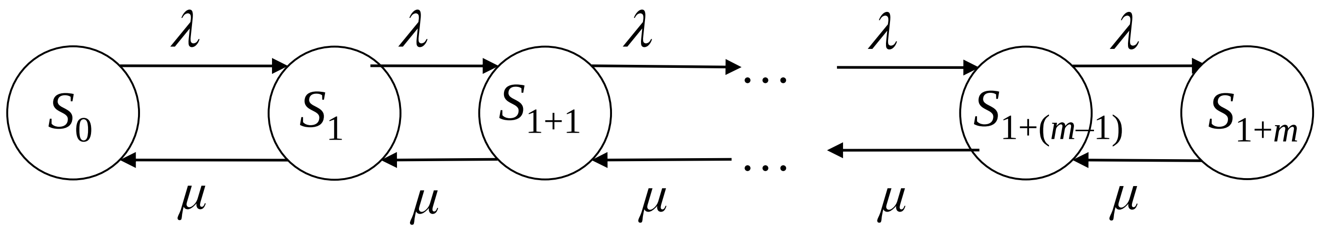
$$\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{T}_{sys} = \bar{T}_s + \bar{T}_{line} = \left((\bar{N}_s + \bar{N}_{line}) / \lambda \right) = \bar{N}_{sys} / \lambda$$

Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

n=1



$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{m+1} \psi^k\right)^{-1} = \dfrac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}}, \psi \neq 1; \\ \left(\sum_{k=0}^{m+1} \psi^k\right)^{-1} = \dfrac{1}{m+2}, \psi = 1. \end{cases}$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$p_{отк} = p_{m+1} = \left(\psi^{m+1}\right) p_0$$

Вероятность принятия заявки

$$p_{sys} = 1 - p_{отк} = 1 - \psi^{m+1} \cdot p_0$$

Основные характеристики СМО

Предельные вероятности состояний:

$$p_{m+1} = \left(\psi^{m+1}\right) p_0$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - p_{m+1} = 1 - \left(\psi^{m+1}\right) p_0$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - p_{отк}\right]$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{N}_{line} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \ldots + m \cdot p_{m+1}$$

Основные характеристики СМО

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{N}_{line} = \psi^2 \cdot \frac{1-\psi^m \cdot (m - m \cdot \psi + 1)}{(1-\psi)^2} \cdot p_0 \quad , \psi \neq 1$$

$$\bar{N}_{line} = \frac{m \cdot (m+1)}{2(m+2)} \quad , \psi = 1$$

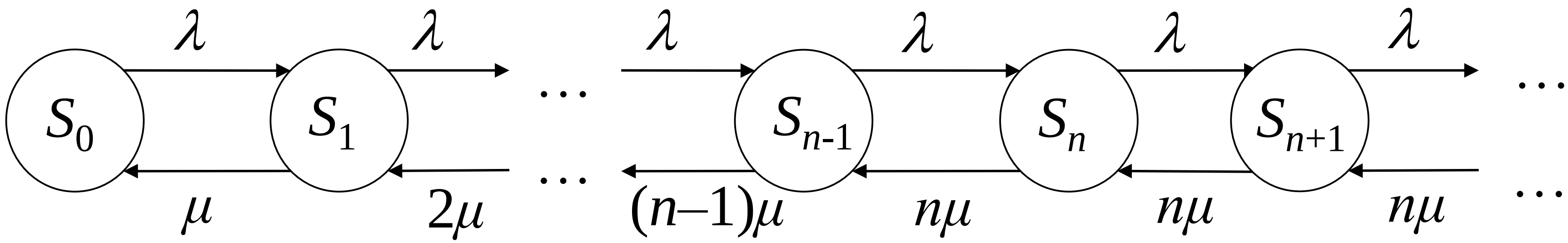
Среднее время ожидания в очереди:

$$\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda$$

Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{T}_{sys} = \bar{T}_{line} + \mu$$

Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью



$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\psi^k}{k!}+\frac{\psi^{n+1}}{n!(n-\psi)}\right)^{-1};$$

$$p_k=\begin{cases}(\psi^k/k!)\,p_0,\; k=1,2,\ldots,n;\\ (\psi^k/n^{k-n}k!)\,p_0,\; k=n+1,n+2,\ldots\end{cases}$$

Основные характеристики СМО

Вероятность отказа: $p_{отк} = 0$

Вероятность принятия заявки: $Q = p_{sys} = 1$

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda$

Среднее число занятых каналов: $\bar{N}_s = A / \mu$

Среднее число заявок в очереди: $$\bar{N}_{line} = \frac{\psi^{n+1}}{n!(1-\frac{\psi}{n})^2} p_0$$

Основные характеристики СМО

Среднее время ожидания в очереди:

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{line}}{\lambda}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе:

$$\bar{N}_{sys} = \bar{N}_{line} + \bar{N}_{s} = \bar{N}_{line} + \psi$$

Среднее время пребывания заявок в системе:

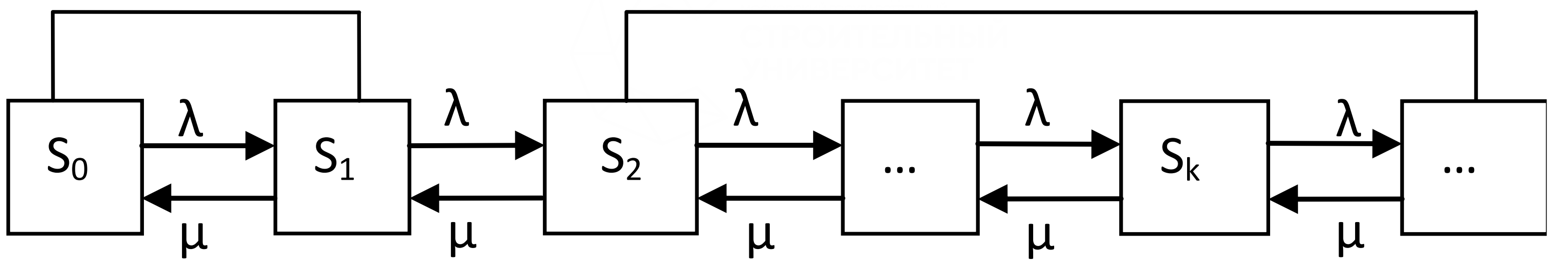
$$\bar{T}_{sys} = \frac{\bar{N}_{sys}}{\lambda}$$

Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

Очереди нет

Очередь любой длины



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Основные характеристики СМО

Приведенная интенсивность нагрузки СМО:
при $\lambda < \mu$

$$\psi = \lambda / \mu$$

Вероятность обслуживания: $p_{обс} = 1$

Вероятность отказа: $p_{отк} = 0$

Вероятность простоя системы: $p_0 = 1 - \psi$

Вероятность занятости системы: $p_1 = 1 – p_0$

Вероятность пребывания в очереди k заявок:

$$p_k = \psi^k(1 - \psi)$$

Основные характеристики СМО

Относительная пропускная способность :

$$Q = p_{обс} = 1$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda * Q = \lambda$$

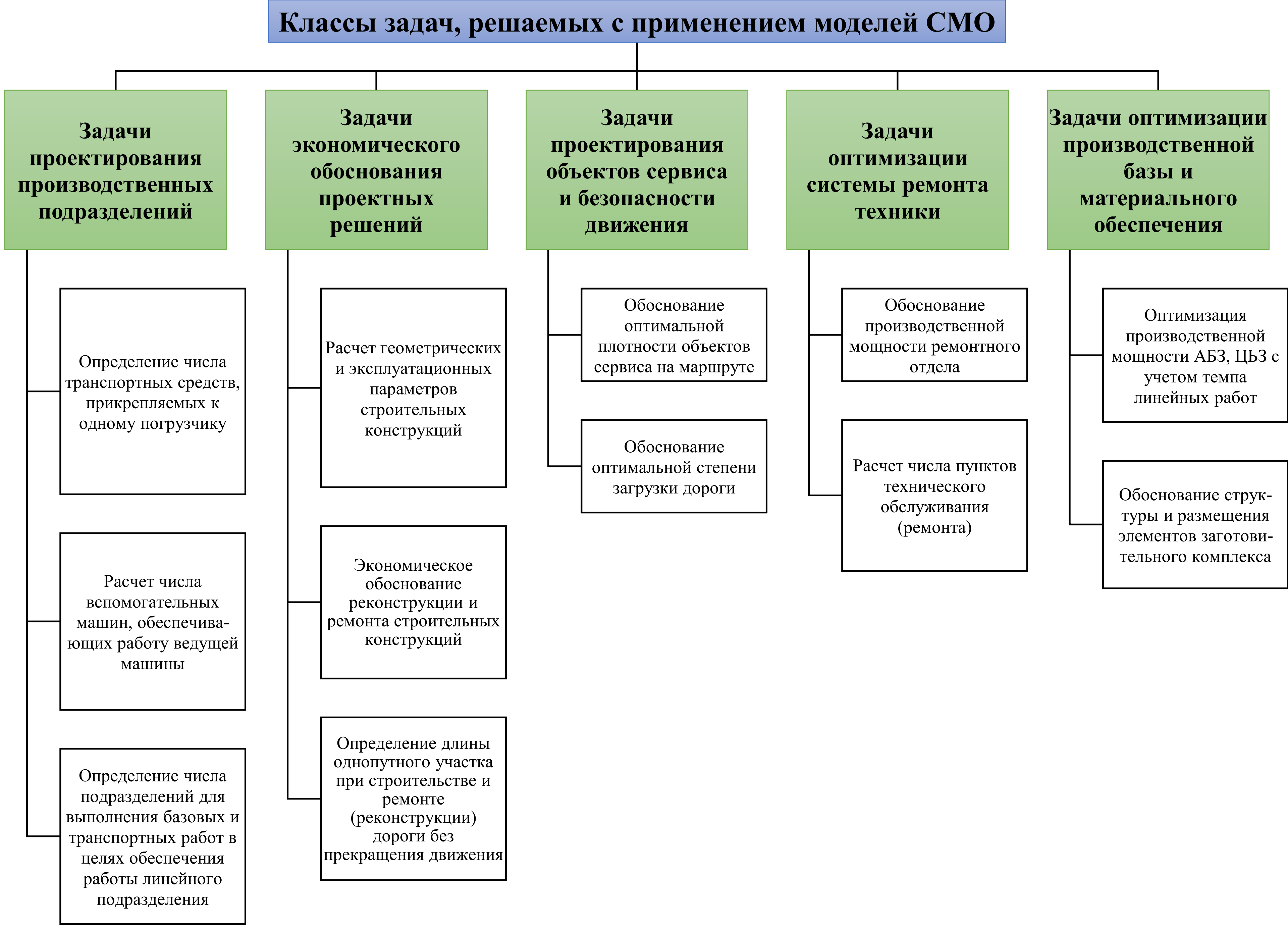
Среднее число обслуженных заявок:

$$L_{об} = \psi$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{N}_{line} = \frac{\psi^2}{1-\psi}$$

Среднее число заявок в системе: $\bar{N}_{sys} = \bar{N}_{line} + \psi$


Классы задач, решаемых с применением моделей СМО
Задачи проектирования производственных подразделений
Определение числа транспортных средств, прикрепляемых к одному погрузчику
Расчет числа вспомогательных машин, обеспечивающих работу ведущей машины
Определение числа подразделений для выполнения базовых и транспортных работ в целях обеспечения работы линейного подразделения
Задачи экономического обоснования проектных решений
Расчет геометрических и эксплуатационных параметров строительных конструкций
Экономическое обоснование реконструкции и ремонта строительных конструкций
Определение длины однопутного участка при строительстве и ремонте (реконструкции) дороги без прекращения движения
Задачи проектирования объектов сервиса и безопасности движения
Обоснование оптимальной плотности объектов сервиса на маршруте
Обоснование оптимальной степени загрузки дороги
Задачи оптимизации системы ремонта техники
Обоснование производственной мощности ремонтного отдела
Расчет числа пунктов технического обслуживания (ремонта)
Задачи оптимизации производственной базы и материального обеспечения
Оптимизация производственной мощности АБЗ, ЦБЗ с учетом темпа линейных работ
Обоснование структуры и размещения элементов заготовительного комплекса

Для работы в карьере по добыче камня требуется выбрать экскаватор, если имеется возможность использовать для этой цели любой из трех типов экскаваторов, охарактеризованных в таблице. В среднем в карьер на погрузку прибывают 14 автомобилей в час. Объем материала, вывозимого за один рейс автомобилем-самосвалом 3 м^3. Стоимость машино-смены автомобиля-самосвала - 15 у.е.

Исходные данные

Емкость ковша экскаватора, м^3	Стоимость 1 маш.-смены, у.е.	Производительность м^3/смена
0,65	20	60
1	40	90
1,5	60	135

Решить двумя способами:

1. С помощью сравнения $\mu_{опт}$ с μ для экскаватора. Экскаватор, у которого $\mu_{опт}$ совпадает со значением μ и будет оптимальным для работы в карьере.
2. С помощью нахождения суммарных потерь от простоя самосвалов и экскаваторов

$$C_{\Sigma}^{пр} = (1-\psi)C_{пр} + \frac{\psi^2}{1-\psi}C_{тр} \rightarrow \min$$

Пример

Проанализируем работу склада готовых изделий завода железобетонных изделий методами теории массового обслуживания. Источниками заявок являются тележки с прицепами, подвозящие изделия на склад, и панелевозы, вывозящие эти изделия со склада. Каналами обслуживания являются краны. Если все краны заняты погрузочно-разгрузочными работами, тележки и панелевозы становятся в очередь и при освобождении кранов поступают на обслуживание в порядке очереди. Продолжительность обслуживания — случайная величина с показательным распределением и параметром μ (среднее число заявок, обслуживаемых одним каналом в единицу времени).

Проведя наблюдения за работой склада и статистическую обработку наблюдений, получим следующие параметры:

средние интенсивности потока панелевозов $\lambda_п$==5 ед/ч;

тележек $\lambda_т$= 0,3 ед/ч (в каждом из 5 пролетов);

среднюю производительность каждого крана при обслуживании панелевозов $\mu_п$= 4 ед/ч, тележек $\mu_т$= 2 ед/ч;

количество работающих кранов n=5 (по одному в каждом пролете);

среднее число изделий, нагружаемых на панелевоз, $b_п$= 6, на тележку $b_т$= 20.

Используя методы СМО, сравним два варианта организации работы склада: 1) с равномерным закреплением панелевозов и тележек за кранами, 2) без закрепления за кранами.