

# Моделирование дискретных систем

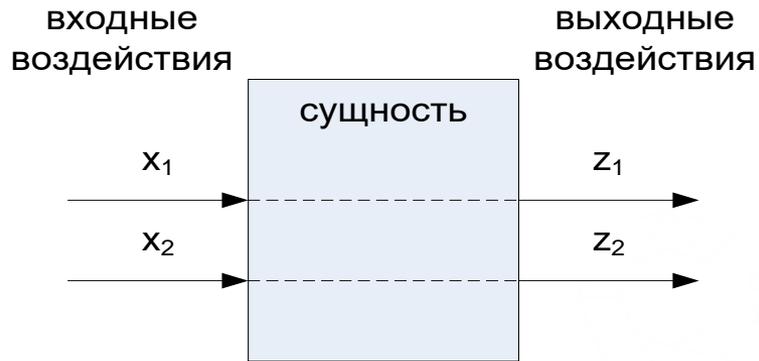


НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
СТРОИТЕЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

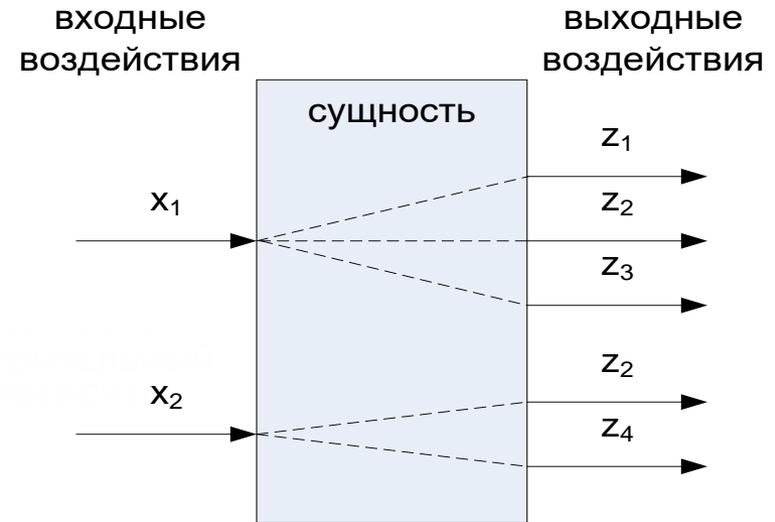
## Конечные автоматы

- ❑ **Трансформирующие системы** осуществляют некоторое преобразование входных данных, и после этого завершают свою работу. В таких системах, как правило, входные данные полностью известны и доступны на момент запуска системы, а выходные – только после завершения ее работы. К трансформирующим системам относятся, например, архиваторы и компиляторы.
- ❑ **Интерактивные системы** взаимодействуют с окружающей средой в режиме диалога (например, текстовый редактор). Характерной особенностью таких систем является то, что они могут контролировать скорость взаимодействия с окружающей средой – заставлять среду «ждать».
- ❑ **Реактивные системы** взаимодействуют с окружающей средой путем обмена сообщениями в темпе, задаваемом средой. К этому классу можно отнести большинство телекоммуникационных систем, а также системы контроля и управления физическими устройствами.

- «Сложное поведение»
  - поведение, зависящее от состояния
  - реакция зависит от предыстории
- «Простое поведение»
  - поведение, не зависящее от состояния
  - реакция зависит только от воздействия



Сущность с простым поведением



Сущность со сложным поведением

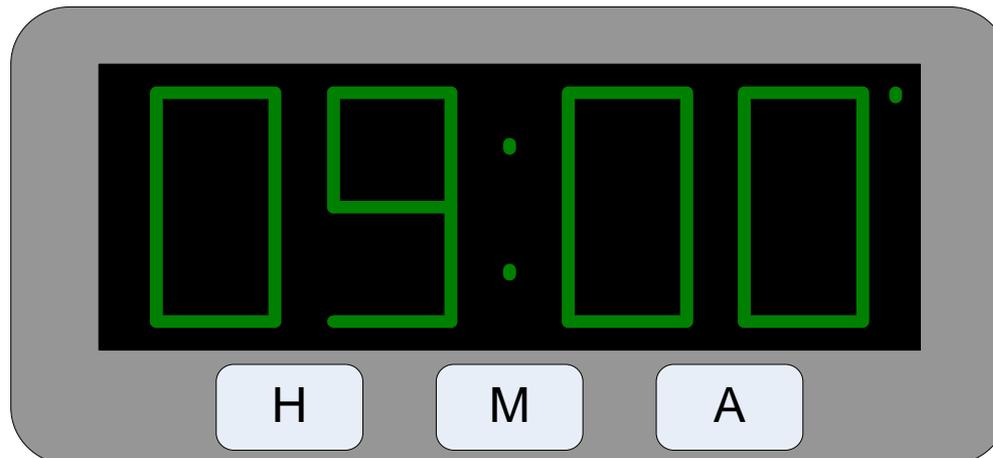
## ЭЛЕКТРОННЫЕ ЧАСЫ

- Простое поведение
  - Н – увеличивает на единицу число часов
  - М – увеличивает на единицу число минут

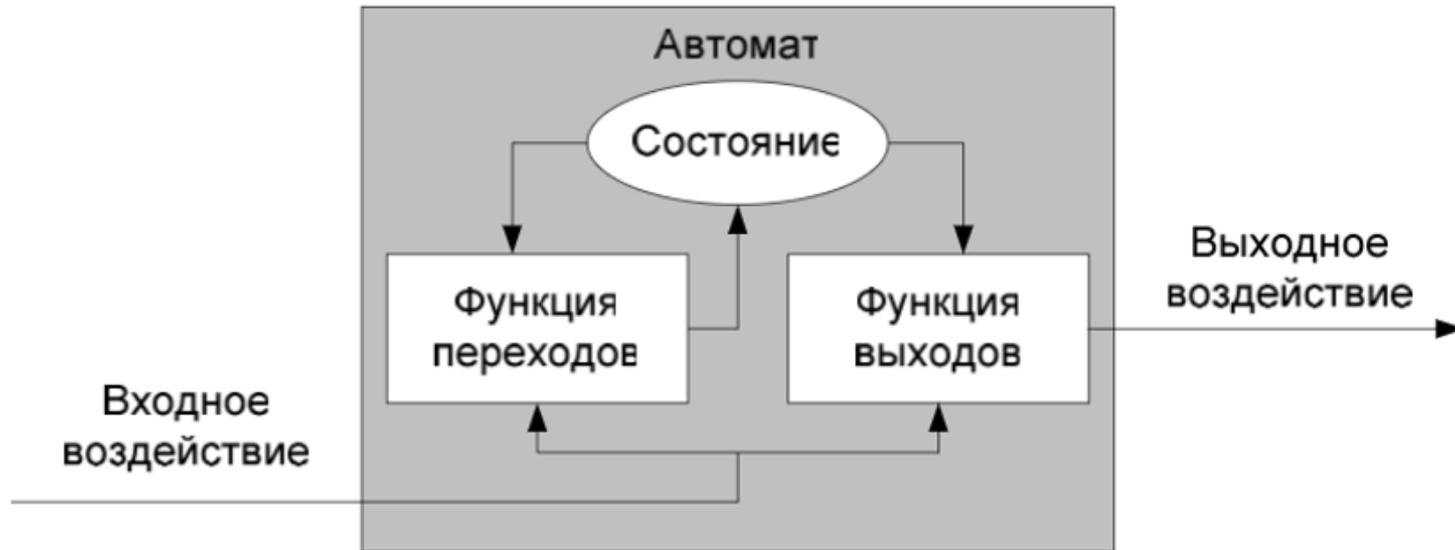


## ЭЛЕКТРОННЫЕ ЧАСЫ

- Сложное поведение
  - Н – увеличивает на единицу число часов
  - М – увеличивает на единицу число минут
  - А – включает и выключает настройку «будильник»



- *Состояние*
  - особая величина, которая в неявной форме объединяет все входные воздействия прошлого, влияющие на реакцию сущности в настоящий момент времени
- *Свойства состояния системы:*
  - текущее состояние несет в себе всю информацию о прошлом системы, необходимую для определения ее реакции на любое входное воздействие, формируемое в момент времени  $t_0$
  - не требуется знание предыстории
- *Входное воздействие*
  - это вектор, составляющие которого - события и входные переменные
- *Функция переходов*
  - правила, по которым происходит смена состояний
- *Выходное воздействие*
- *Функция выходов*
  - правила формирования выходных воздействий
- *Автомат без выходов (конечный)*
  - совокупность конечного множества состояний и конечного множества входных воздействий



- множество  $X$  входных сигналов (входной алфавит),
- множество  $Y$  выходных сигналов (выходной алфавит),
- множество  $Z$  внутренних состояний (внутренний алфавит или алфавит состояний),
- функция переходов,
- функция выходов
- начальное состояние

## Конечные автоматы

Автоматы первого рода

Автоматы второго рода

## Конечные автоматы

Автоматы с памятью

Автоматы без памяти

## Конечные автоматы

Синхронные автоматы

Асинхронные автоматы

## Конечные автоматы

Автоматы  
первого рода

Автоматы  
второго рода

## Конечные автоматы

Автоматы с  
памятью

Автоматы без  
памяти

## Конечные автоматы

Синхронные  
автоматы

Асинхронные  
автоматы

- Для автомата первого рода (**автомата Мили**):

$$z(t + 1) = \phi [z(t), x(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t) = \psi [z(t), x(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

- Для автомата второго рода:

$$z(t + 1) = \phi [z(t), x(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t) = \psi [z(t), x(t - 1)], \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

- **Автомат Мура** – это автомат, для которого функция выходов не зависит от входной переменной  $x(t)$ :

$$y(t) = \psi (z(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Он является автоматом II рода.

## Конечные автоматы

Автоматы первого рода

Автоматы второго рода

## Конечные автоматы

Автоматы с памятью

Автоматы без памяти

## Конечные автоматы

Синхронные автоматы

Асинхронные автоматы

## Конечные автоматы

Автоматы первого рода

Автоматы второго рода

## Конечные автоматы

Автоматы с памятью

Автоматы без памяти

## Конечные автоматы

Синхронные автоматы

Асинхронные автоматы

Для автомата Мили

Функции переходов

$X_i / Z_k$	$Z_0$	$Z_1$	...	$Z_n$
$X_1$	$\phi(X_1, Z_0)$	$\phi(X_1, Z_1)$	...	$\phi(X_1, Z_n)$
$X_2$	$\phi(X_2, Z_0)$	$\phi(X_2, Z_1)$	...	$\phi(X_2, Z_n)$
...	...	...	...	...
$X_m$	$\phi(X_m, Z_0)$	$\phi(X_m, Z_1)$	...	$\phi(X_m, Z_n)$

ФУНКЦИИ ВЫХОДОВ

$X_i / Z_k$	$Z_0$	$Z_1$	...	$Z_n$
$X_1$	$\psi(X_1, Z_0)$	$\psi(X_1, Z_1)$	...	$\psi(X_1, Z_n)$
$X_2$	$\psi(X_2, Z_0)$	$\psi(X_2, Z_1)$	...	$\psi(X_2, Z_n)$
...	...	...	...	...
$X_m$	$\psi(X_m, Z_0)$	$\psi(X_m, Z_1)$	...	$\psi(X_m, Z_n)$

# Табличный способ

Для автомата Мура

Функции переходов и выходов

$X_i$	$Z_0$	$Z_1$	...	$Z_n$
	$\psi(Z_0)$	$\psi(Z_1)$	...	$\psi(Z_n)$
$X_1$	$\phi(X_1, Z_0)$	$\phi(X_1, Z_1)$	...	$\phi(X_1, Z_n)$
$X_2$	$\phi(X_2, Z_0)$	$\phi(X_2, Z_1)$	...	$\phi(X_2, Z_n)$
...	...	...	...	...
$X_m$	$\phi(X_m, Z_0)$	$\phi(X_m, Z_1)$	...	$\phi(X_m, Z_n)$

## Пример 1:

Пусть задан автомат первого рода:  $X=\{x_1, x_2\}$ ,  $Z=\{z_0, z_1, z_2\}$ ,  
 $Y=\{y_1, y_2\}$ ,  
отображение  $F$  множества  $Z$  в себя определяется  
следующим образом:

$$Fz_0 = \{z_2(x_1 / y_1), z_0(x_2 / y_1)\},$$

$$Fz_1 = \{z_0(x_1 / y_1), z_2(x_2 / y_2)\},$$

$$Fz_2 = \{z_0(x_1 / y_2), z_1(x_2 / y_1)\}.$$

$$Fz_0 = \{z_2(x_1 / y_1), z_0(x_2 / y_1)\},$$

$$Fz_1 = \{z_0(x_1 / y_1), z_2(x_2 / y_2)\},$$

$$Fz_2 = \{z_0(x_1 / y_2), z_1(x_2 / y_1)\}.$$

## Пример 2

Пусть задан автомат Мура:  $X=\{x_1, x_2\}$ ,  $Z=\{z_0, z_1, z_2\}$ ,  
 $Y=\{y_1, y_2\}$ ,  
отображение  $F$  множества  $Z$  в себя определяется  
следующим образом:

$$Fz_0(y_2) = \{z_2(x_1), z_0(x_2)\},$$

$$Fz_1(y_2) = \{z_0(x_1), z_2(x_2)\},$$

$$Fz_2(y_1) = \{z_0(x_1), z_1(x_2)\}.$$

$$Fz_0(y_2) = \{z_2(x_1), z_0(x_2)\},$$

$$Fz_1(y_2) = \{z_0(x_1), z_2(x_2)\},$$

$$Fz_2(y_1) = \{z_0(x_1), z_1(x_2)\}.$$

**Пример 3.** По заданному автомату Мура

$x_i$	$y$				
	$y_1$	$y_1$	$y_3$	$y_2$	$y_3$
	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	$z_1$	$z_4$	$z_4$	$z_2$	$z_2$
$x_2$	$z_3$	$z_1$	$z_1$	$z_0$	$z_0$

построить автомат Мили, интерпретирующий данный автомат Мура.

## Пример 1: Построить графоид для автомата Мили

$x_i$	$z_k$		
	$z_0$	$z_1$	$z_2$
	Переходы		
$x_1$	$z_2$	$z_0$	$z_0$
$x_2$	$z_0$	$z_2$	$z_1$
	Выходы		
$x_1$	$y_1$	$y_1$	$y_2$
$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$

Пример 2: Построить графоид для автомата Мура

$x_i$	$y$				
	$y_1$	$y_1$	$y_3$	$y_2$	$y_3$
	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	$z_1$	$z_4$	$z_4$	$z_2$	$z_2$
$x_2$	$z_3$	$z_1$	$z_1$	$z_0$	$z_0$

## Пример 1: Построить матрицу автомата Мили

$x_i$	$z_k$		
	$z_0$	$z_1$	$z_2$
	Переходы		
$x_1$	$z_2$	$z_0$	$z_0$
$x_2$	$z_0$	$z_2$	$z_1$
	Выходы		
$x_1$	$y_1$	$y_1$	$y_2$
$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$

Пример 2: Построить матрицу автомата Мура

$x_i$	$y$				
	$y_1$	$y_1$	$y_3$	$y_2$	$y_3$
	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	$z_1$	$z_4$	$z_4$	$z_2$	$z_2$
$x_2$	$z_3$	$z_1$	$z_1$	$z_0$	$z_0$

# Дискретно-стохастические модели

P-схемы



$(z_k, y_j)$

Элементы из $\Phi$	...	$(z_1, y_1)$	...	$(z_1, y_2)$	...	$(z_K, y_{J-1})$	$(z_K, y_J)$
$(x_i, z_s)$	...	$b_{11}$	...	$b_{12}$	...	$b_{K(J-1)}$	$b_{KJ}$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J b_{kj} = 1$$

$$P = \langle Z, X, Y, B \rangle$$

Элементы из $Y$	...	$y_1$	$y_2$	...	$y_{J-1}$	$y_J$
$(x_i z_s)$	...	$q_1$	$q_2$	...	$q_{J-1}$	$q_J$
Элементы из $Z$	...	$z_1$	$z_2$	...	$z_{K-1}$	$z_K$
$(x_i z_s)$	...	$v_1$	$v_2$	...	$v_{K-1}$	$v_K$

$$\sum_{j=1}^J q_j = 1$$

$$\sum_{k=1}^K v_k = 1$$

Элементы из $Y$	...	$y_1$	$y_2$	...	$y_{J-1}$	$y_J$
$z_s$	...	$s_1$	$s_2$	...	$s_{J-1}$	$s_J$

$$\sum_{j=1}^J s_j = 1$$

$z_k$	$z_k$				
	$z_1$	$z_2$	$\dots$	$z_{K-1}$	$z_K$
$z_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1(K-1)}$	$p_{1K}$
$z_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2(K-1)}$	$p_{2K}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$z_K$	$p_{K1}$	$p_{K1}$	$\dots$	$p_{K(K-1)}$	$p_{KK}$

$Z$	$z_1$	$z_2$	$\dots$	$z_{K-1}$	$z_K$
$Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_{K-1}$	$y_K$

$Z$	$z_1$	$z_2$	$\dots$	$z_{K-1}$	$z_K$
$D$	$d_1$	$d_2$	$\dots$	$d_{K-1}$	$d_K$

$$P' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \hline 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_k \\ \hline 0 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ \hline 0 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & p_{K1} & p_{K2} & \dots & p_{KK} \\ \hline \hline \end{array}$$

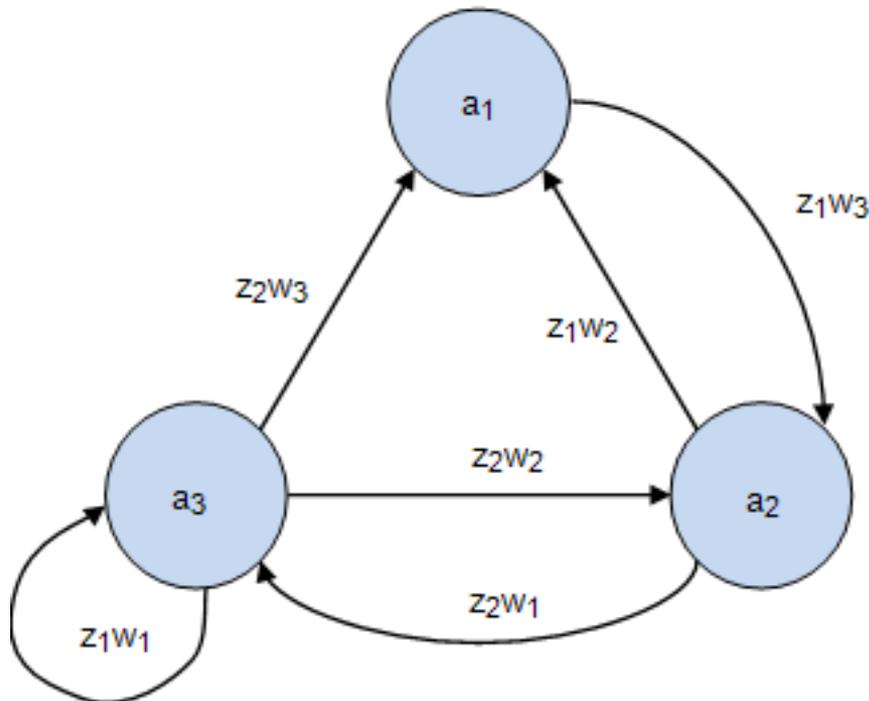
$$P' = \begin{vmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$Z$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$Y$	0	0	1	1	0

**Реакцией автомата** называется последовательность выходных сигналов автомата, полученная под воздействием некоторой последовательности входных сигналов, то есть реакция - это выходное слово автомата на конкретное входное слово.

Автомат установлен в исходное состояние  $a_1$ .

**Входное слово:**  $\xi = (z_1, z_2, z_1, z_2, z_2)$



Моменты времени t	t1	t2	t3	t4	t5
Входные сигналы	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_2$
Состояния	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_3$	$a_2$
Выходные сигналы	$w_3$	$w_1$	$w_1$	$w_2$	$w_2$

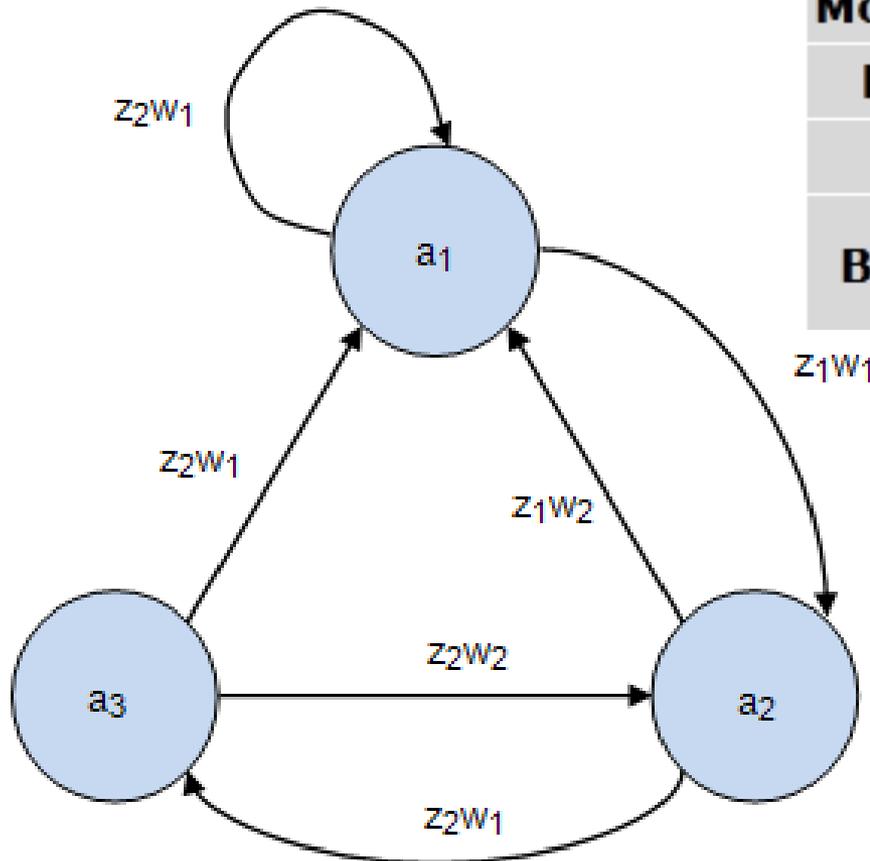
**Выходное слово:**  
 $(w_3, w_1, w_1, w_2, w_2)$

# Эквивалентные автоматы

Автомат Мили **S1** установлен в исходное состояние **a1**.

На вход подается входное слово:  $\xi = (z_1, z_1, z_2, z_1, z_2, z_2)$

В результате сформировано выходное слово:  $(w_1, w_2, w_1, w_1, w_1, w_2)$



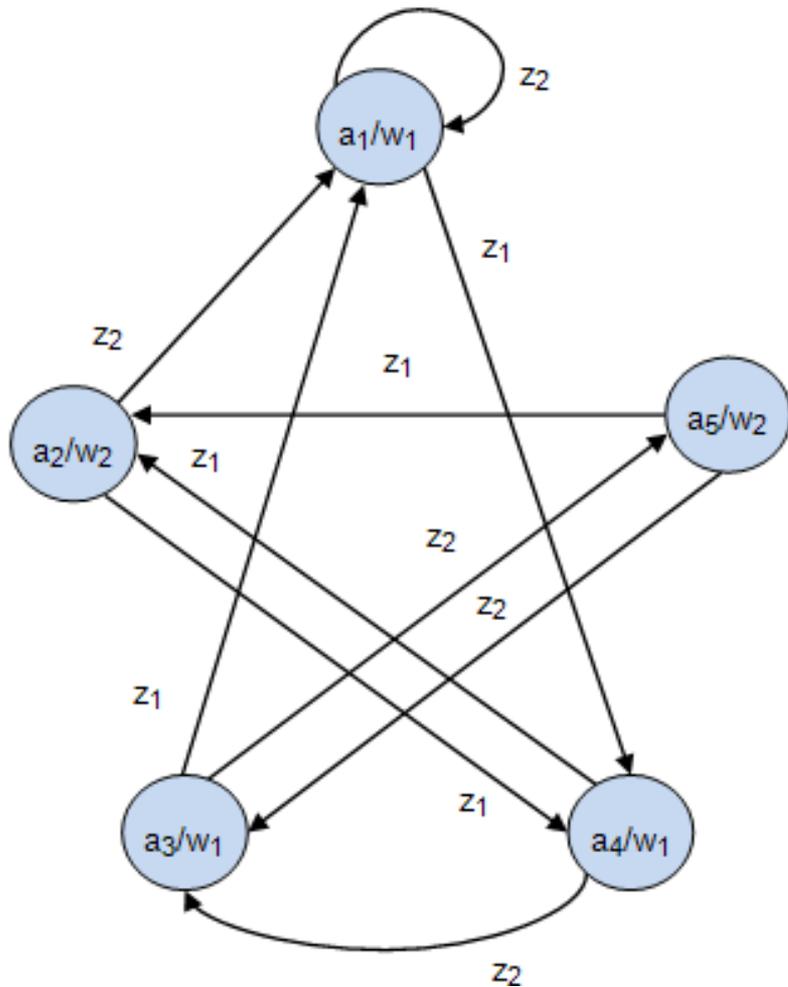
Моменты времени	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Входное слово	z1	z1	z2	z1	z2	z2	
Состояния	a1	a2	a1	a1	a2	a3	a2
Выходное слово	w1	w2	w1	w1	w1	w2	
	реакция автомата						

# Эквивалентные автоматы

Автомат Мура **S2** установлен в исходное состояние **a1**.

На вход подается входное слово:  $\xi = (z_1, z_1, z_2, z_1, z_2, z_2)$

В результате сформировано выходное слово:  $(w_1, w_2, w_1, w_1, w_1, w_2)$



Моменты времени	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Входное слово	z1	z1	z2	z1	z2	z2	
Состояния	a1	a4	a2	a1	a4	a3	a5
Выходное слово		w1	w2	w1	w1	w1	w2
	реакция автомата						

# Эквивалентные автоматы

Два автомата **S1** и **S2** называются эквивалентными, если:

- входной и выходной алфавиты совпадают;
- их реакции из исходного состояния на любое входное слово совпадают;

## Автомат Мили S1

Моменты времени	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Входное слово	z1	z1	z2	z1	z2	z2	
Состояния	a1	a2	a1	a1	a2	a3	a2
Выходное слово	w1	w2	w1	w1	w1	w2	
	реакция автомата						

## Автомат Мура S2

Моменты времени	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Входное слово	z1	z1	z2	z1	z2	z2	
Состояния	a1	a4	a2	a1	a4	a3	a5
Выходное слово		w1	w2	w1	w1	w1	w2
	реакция автомата						

## Существует теорема:

для любого автомата Мура существует эквивалентный ему автомат Мили и наоборот.

# Преобразование автоматов Мура в Мили

При табличном задании таблица переходов автомата Мили совпадает с таблицей переходов автомата Мура. Таблица выходов автомата Мили получается из таблицы переходов заменой символа  $A_s$ , стоящего на пересечении строки  $z_f$  и столбца  $A_m$ , на символ  $w_g$ , отмечающий столбец  $A_s$  в совмещенной таблице автомата Мура.

*Пусть задан автомат Мура:      Таблица переходов эквивалентного автомата Мили совпадает с таблицей автомата Мура:*

	w1	w2	w3	w2	w3
	a1	a2	a3	a4	a5
z1	a2	a5	a5	a3	a3
z2	a4	a2	a2	a1	a1

	a1	a2	a3	a4	a5
z1	a2	a5	a5	a3	a3
z2	a4	a2	a2	a1	a1

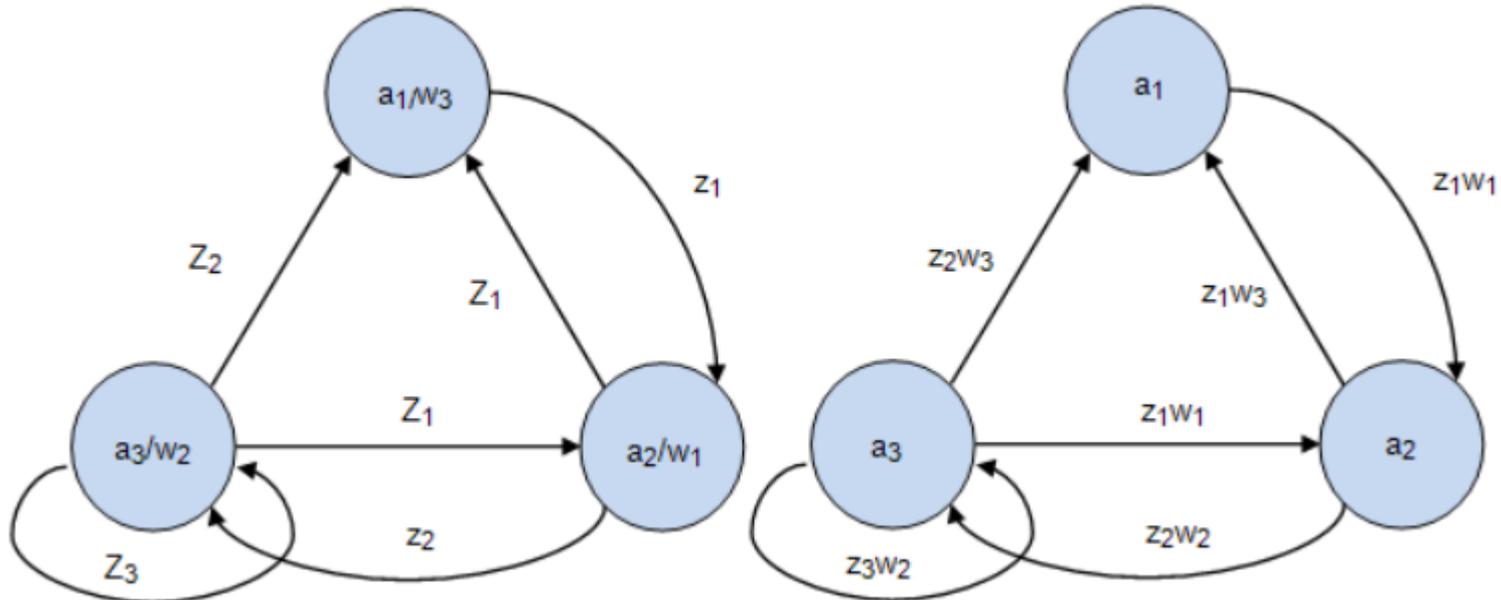
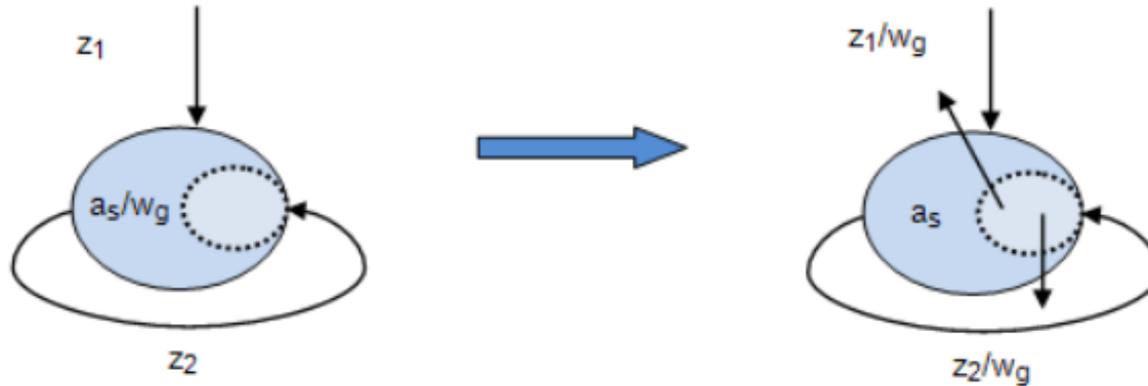
*Таблица выходов автомата Мили*

	a1	a2	a3	a4	a5
z1	w2	w3	w3	w3	w3
z2	w2	w2	w2	w1	w1

Считается, что на переходе из состояния  $A_m$  в состояние  $A_s$  в эквивалентном автомате Мили должен быть сформирован такой же выходной сигнал, что и в автомате Мура, после того как автомат перешел в состояние  $A_s$ .

# Преобразование автоматов Мура в Мили

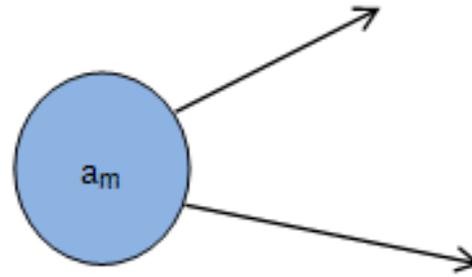
При графическом задании автомата Мура переход к автомату Мили выполняется следующим образом: выходной сигнал  $w_g$ , формируемый в состоянии  $A_s$ , переносится на все дуги, входящие в эту вершину.



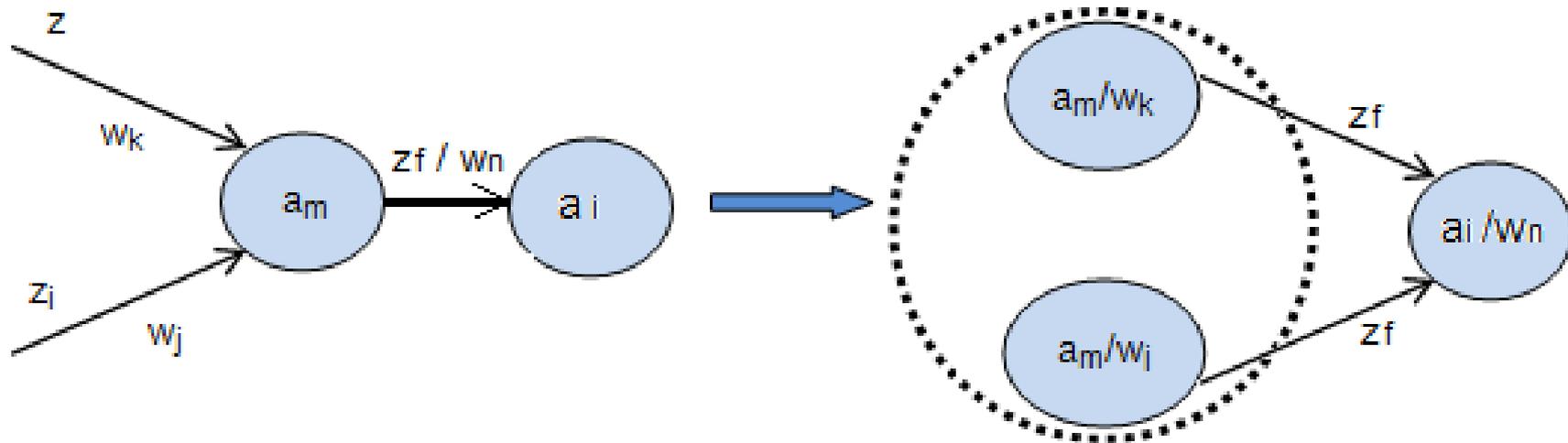
# Преобразование автоматов Мили в Мура

## **Ограничение:**

В автомате Мили не должно быть переходящих состояний, т.е. состояний, в которых имеется хотя бы одна выходящая дуга и не имеется ни одной входящей дуги



## **Графическая интерпретация преобразования:**



# Преобразование автоматов Мили в Мура

Пусть дан автомат Мили:  $S_A = (A_A, Z_A, W_A, \delta_A, \lambda_A, a1_A)$

Требуется перейти к эквивалентному автомату Мура:

$$S_B = (A_B, Z_B, W_B, \delta_B, \lambda_B, a1_B)$$

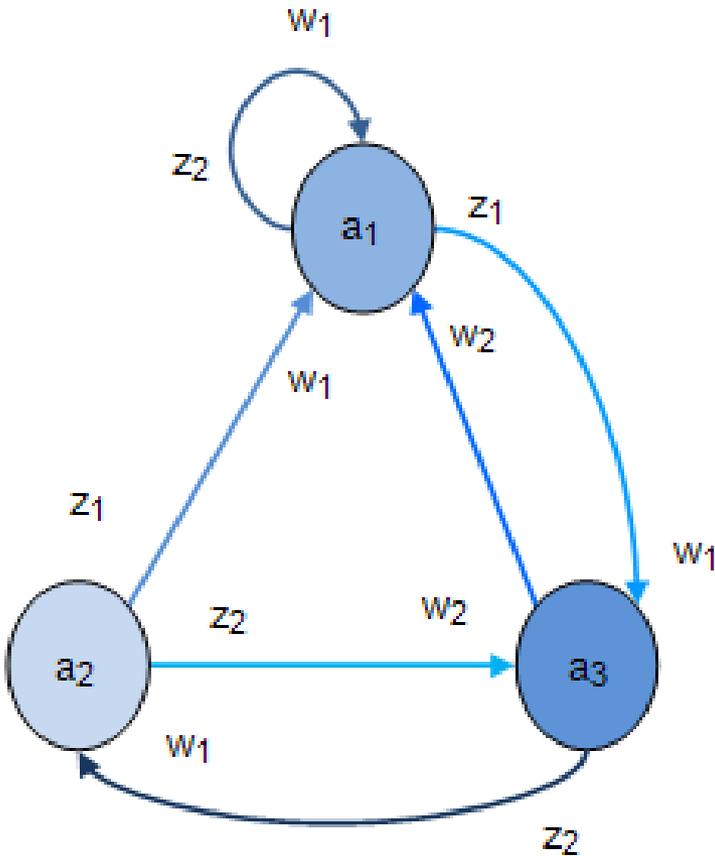
Построим множество состояний автомата **AB**.  
Для этого находим пары:

$$A_1 = \{a_1/w_1, a_1/w_2\} = \{b_1, b_2\}$$

$$A_2 = \{a_2/w_1\} = b_3$$

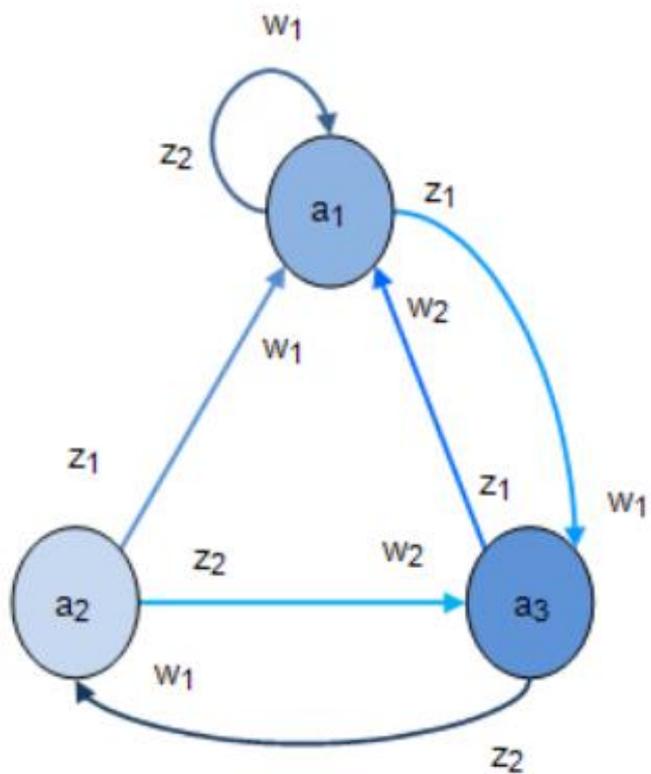
$$A_3 = \{a_3/w_2, a_3/w_1\} = \{b_5, b_4\}$$

$$A_B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

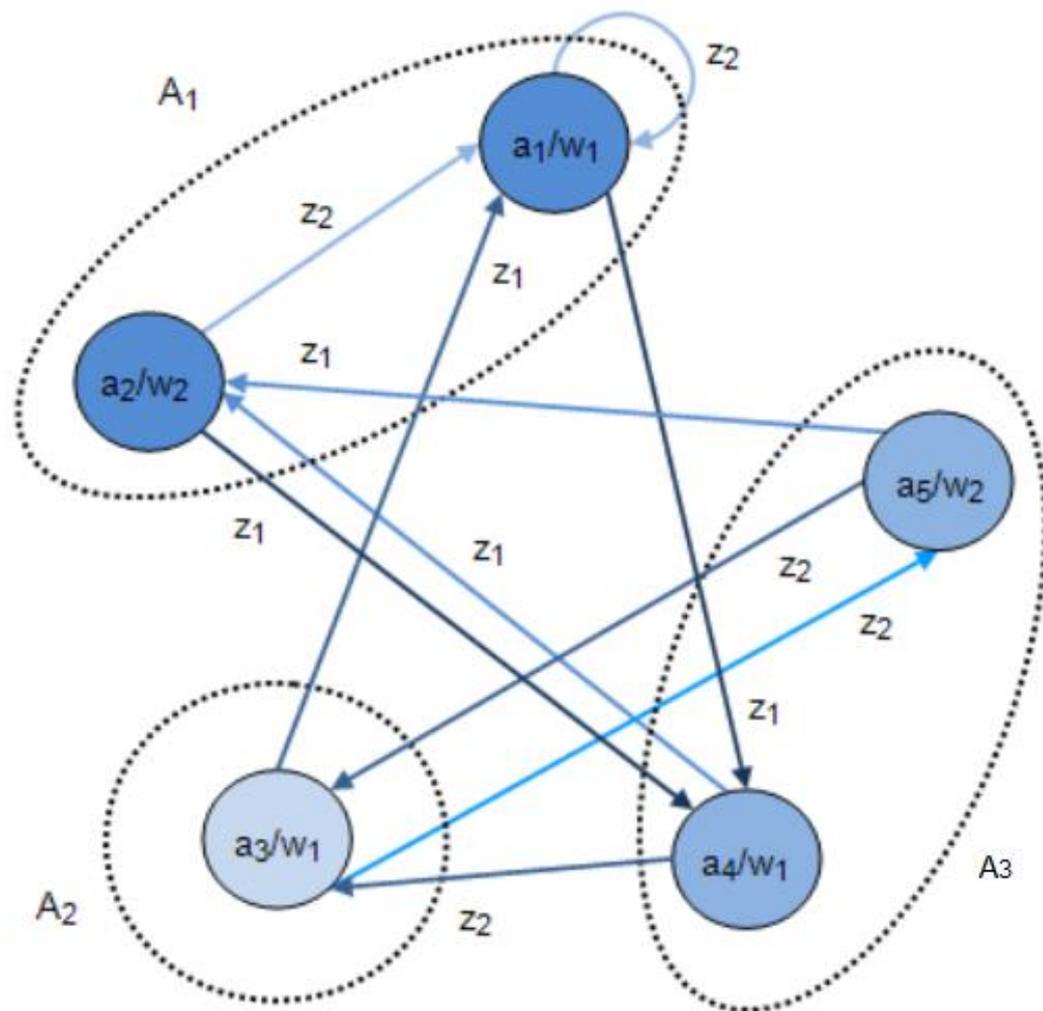


Переобозначив **bi** соответственно как **Ai**, получим граф автомата:

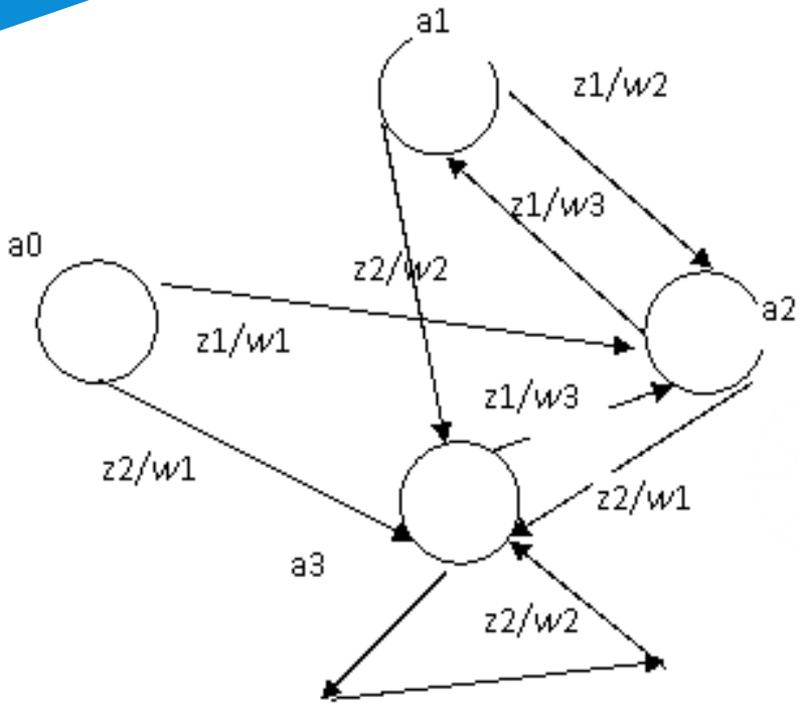
# Преобразование автоматов Мили в Мура



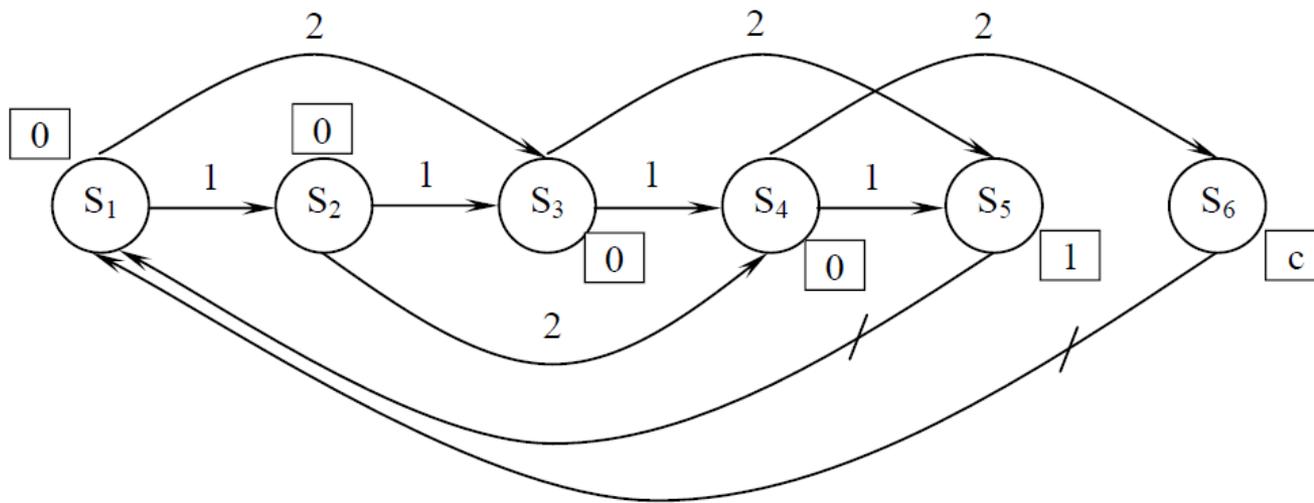
**Автомат  
Мили**



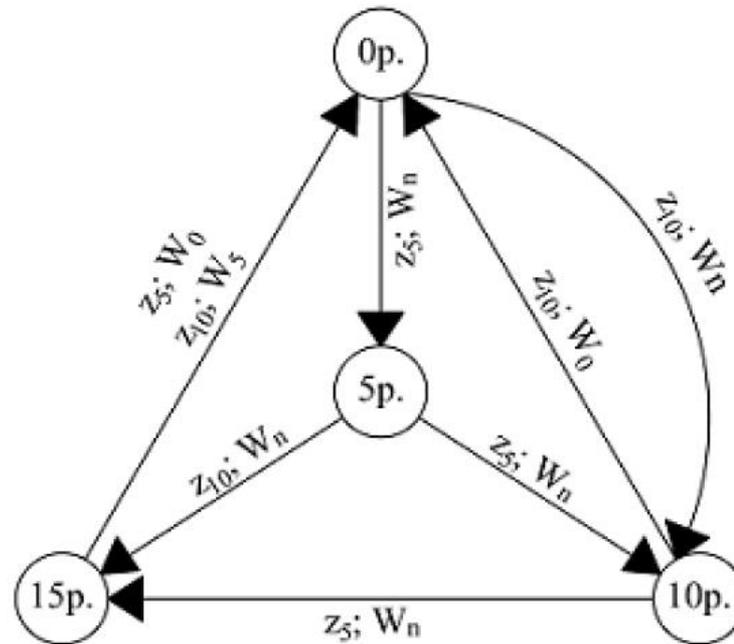
**Эквивалентный автомат  
Мура**



Построить автомат для выдачи магнитной карты. Автомат принимает монеты достоинством 1 или 2 руб., карта стоит 4руб.

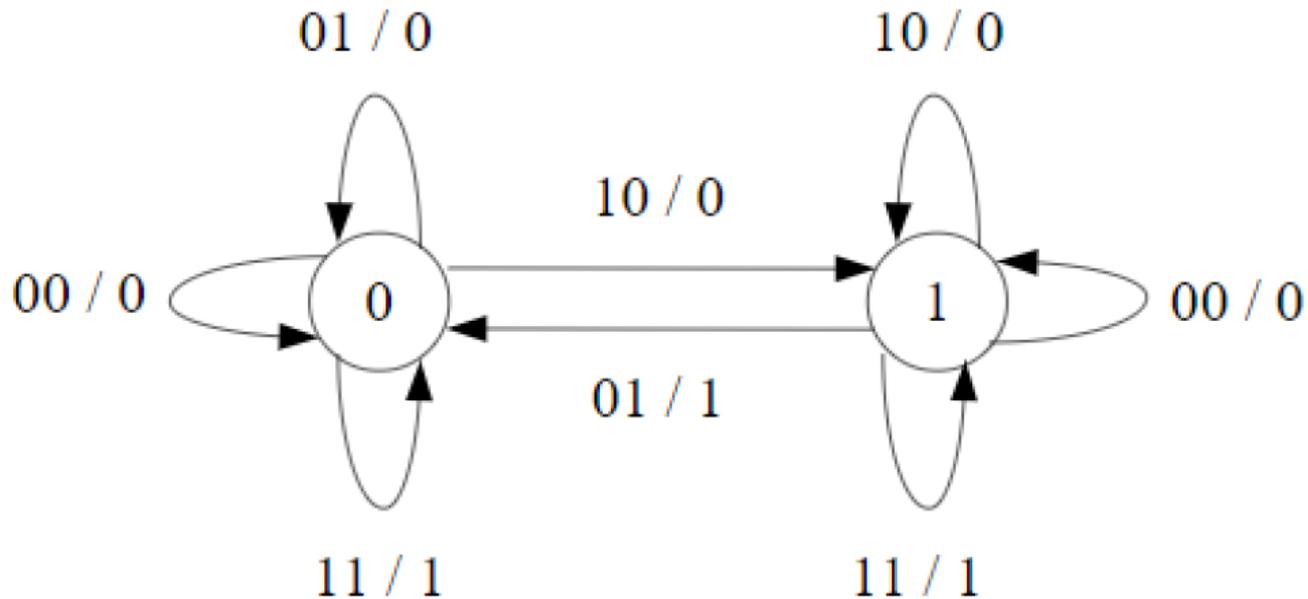


Автомат по продаже шоколадок стоимостью 20 рублей, принимающий монеты номиналом в 5 и 10 рублей и возвращающий сдачу, если это необходимо



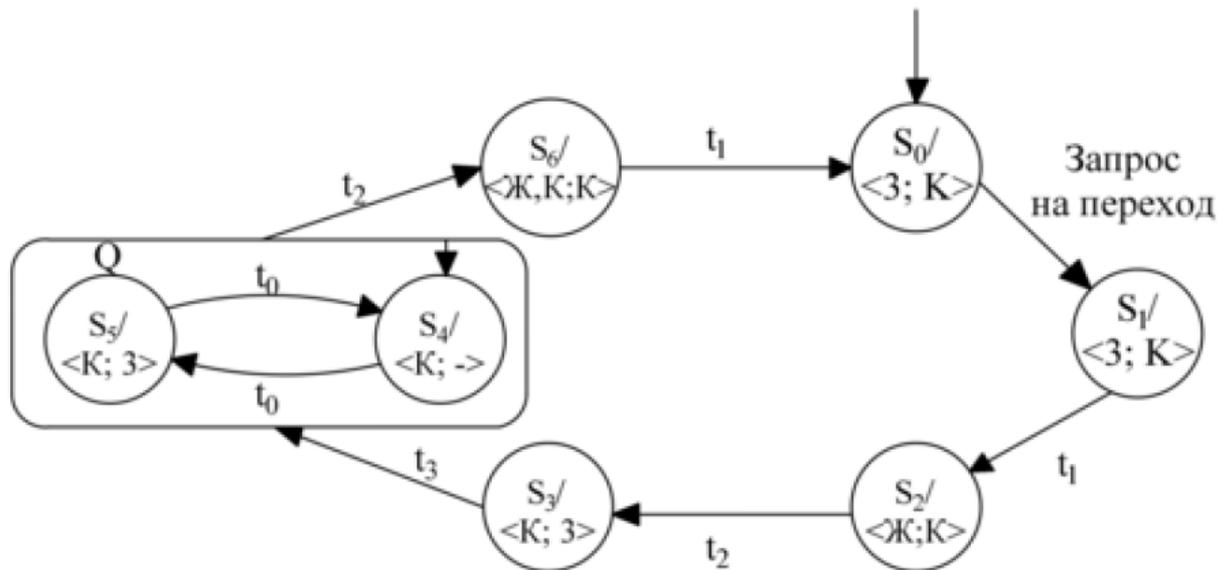
# Пример

Автомат, описывающий работу турникета метро. Турникет имеет два входа – «монета» и «человек». Турникет пропускает человека, если он опустил монету. Если монета поступила на вход, а человек – нет, то автомат запоминает это событие, и пропускает следующего человека без монеты.



# Пример

Автомат, регулирующий пешеходный переход по запросу пешеходов. Внешние события автомата — это события нажатия пешеходами кнопки-запроса на тротуаре и исчерпание тайм-аута. Автомат строится как автомат Мура, в котором выход — регулирование светофора и разрешающий сигнал на переход — это потенциальные сигналы, являющиеся функциями состояния.



Простейшие цифровые часы состоят из дисплея и двух кнопок А и В. Часы могут работать в двух режимах: отображения и настройки. В режиме отображения часы показывают часы и минуты, между которыми мигает символ двоеточия.

Режим настройки состоит из двух подрежимов: настройка часов и настройка минут. Кнопка А позволяет выбрать режим. Каждый раз при ее нажатии происходит переход к очередному режиму в последовательности: отображение, установка часов, установка минут, отображение и т. д. Кнопка В позволяет увеличивать значение часов или минут на единицу при каждом нажатии в одном из режимов установки. Чтобы кнопка смогла породить новое событие, ее необходимо отпустить. Нарисуйте диаграмму состояний часов.

