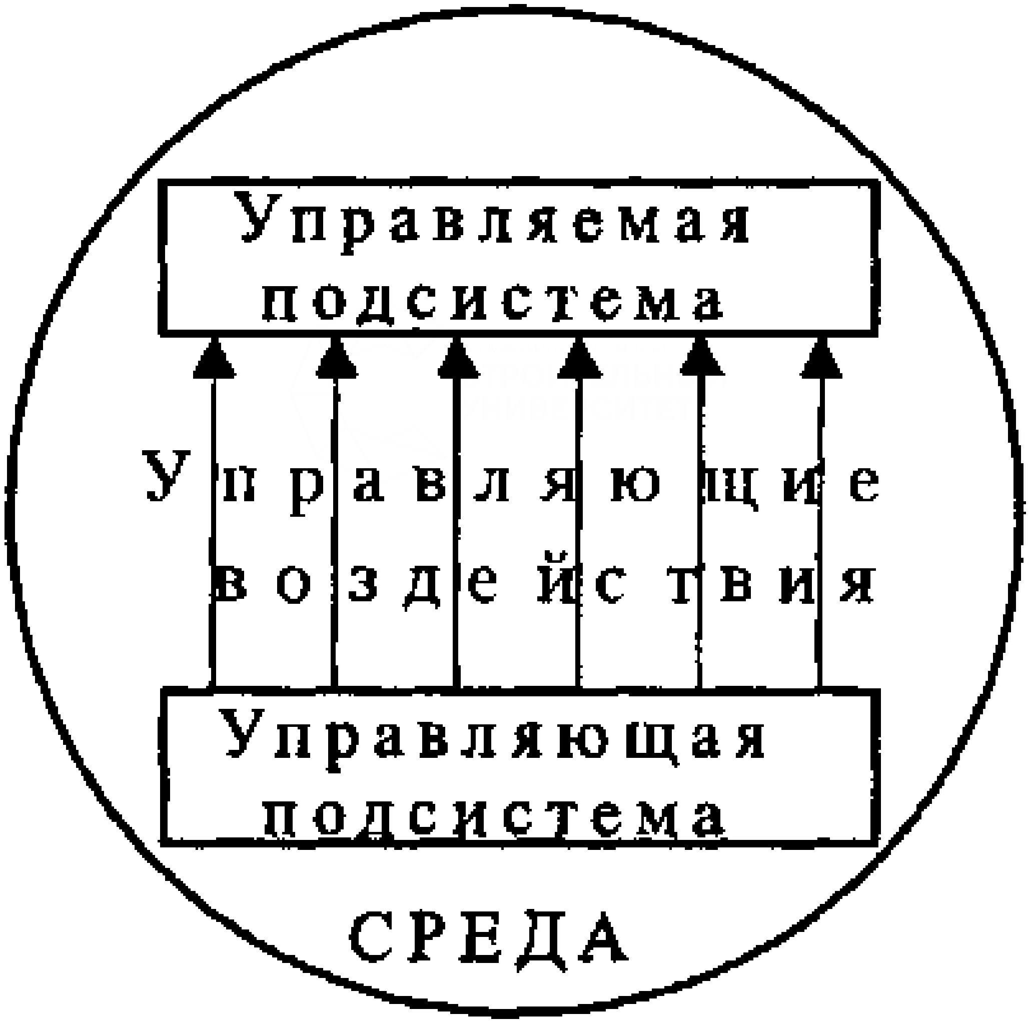
Обоснование проектных решений с применением моделей задач исследования операций

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Введение

Исследование операций – это применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности

Системное описание ЗИО



Системное описание ЗПР

- Наличие некоторого процесса
- Наличие управляющих воздействий
- Наличие цели, ради которой проводится операция
- Выбор наилучшего (оптимального) управления, при котором достигнута цель

Математическая модель ЗИО

Схема исследования

Множества, для построения модель ЗИО

Для построения математической модели необходимо задать следующие три множества:

- X – множество допустимых альтернатив,
- Y – множество возможных состояний среды,
- A – множество возможных исходов.

F: X x $Y \to A$ – функция реализации

1. (X, Y, A, F) - **реализационная структура**

$\varphi : A \to R$ – оценочная функция

2. (X, Y, A, φ) - **оценочная структура**

$f = \varphi \circ F$ $\quad f(x,y) = \varphi(F(x,y))$ – целевая функция

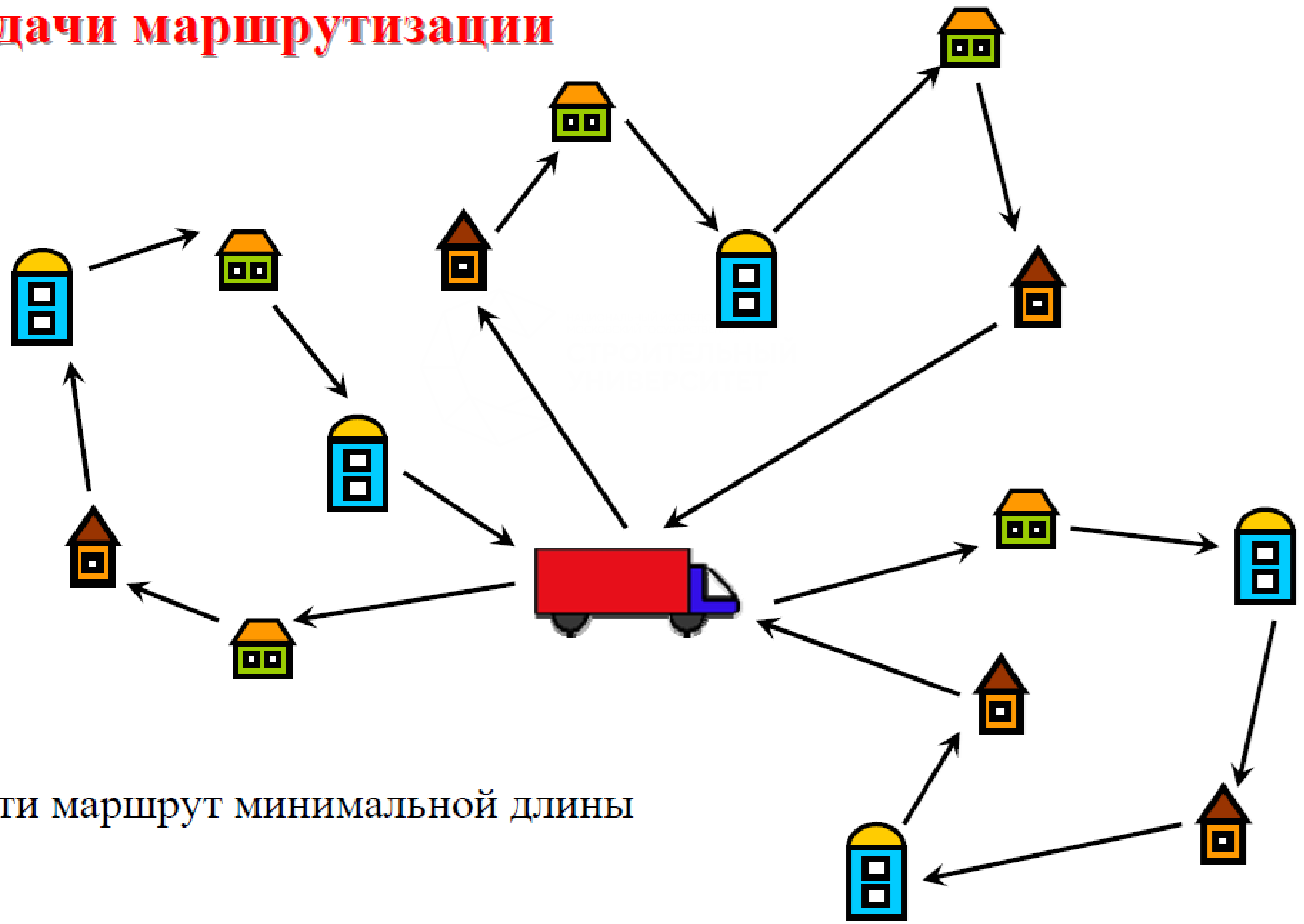
Основные типы ЗИО

- Задачи с детерминированными параметрами
- Задачи в условиях риска
- Задачи в условиях неопределенности
- Задачи в конфликтных ситуациях

Типовые ЗИО

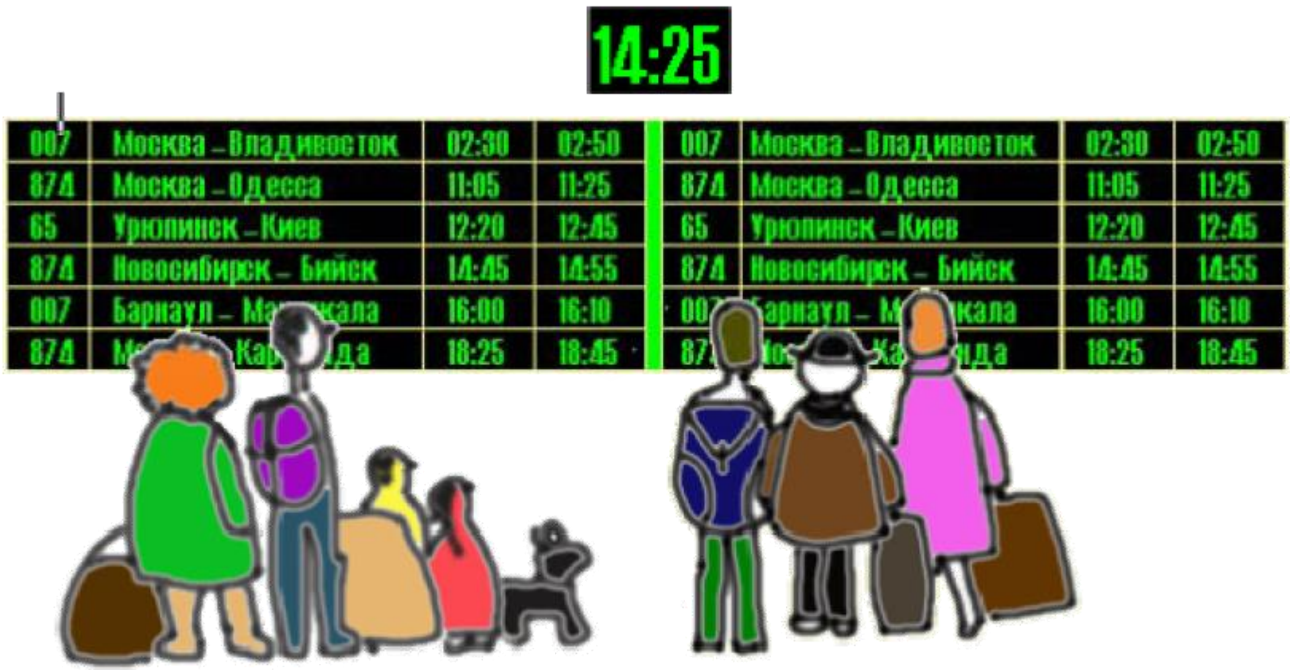
- Задачи распределения ресурсов
- Транспортные задачи
- Задачи о назначении
- Задачи маршрутизации
- Задачи теории расписаний
- Задачи размещения
- Задачи раскроя и упаковки
- Задачи управления Марковскими процессами
- Задачах теории массового обслуживания
- Матричные игры
- Задачи управления запасами

Задачи маршрутизации



Найти маршрут минимальной длины

Задачи теории расписаний



Графики движения поездов, рабочие бригады, ремонт составов

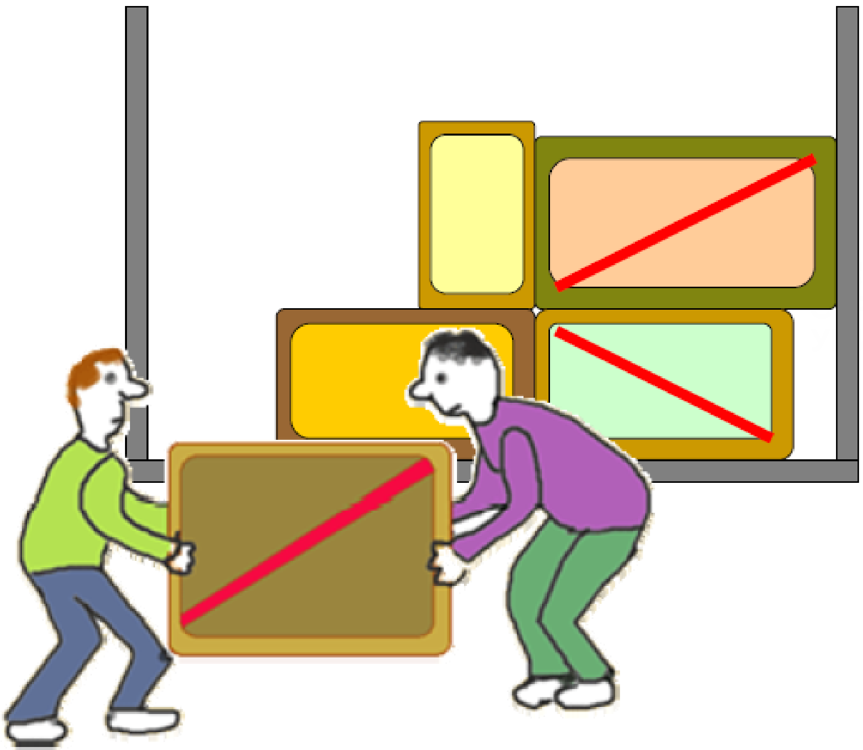
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

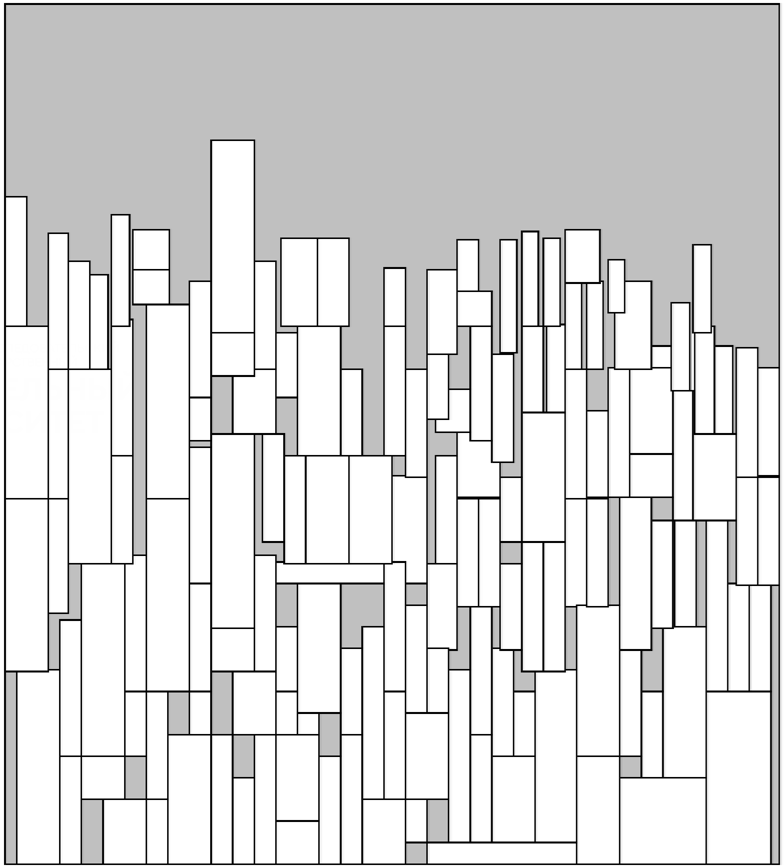
Задачи размещения производства

Системы сотовой связи, филиалы банков, производство продукции

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

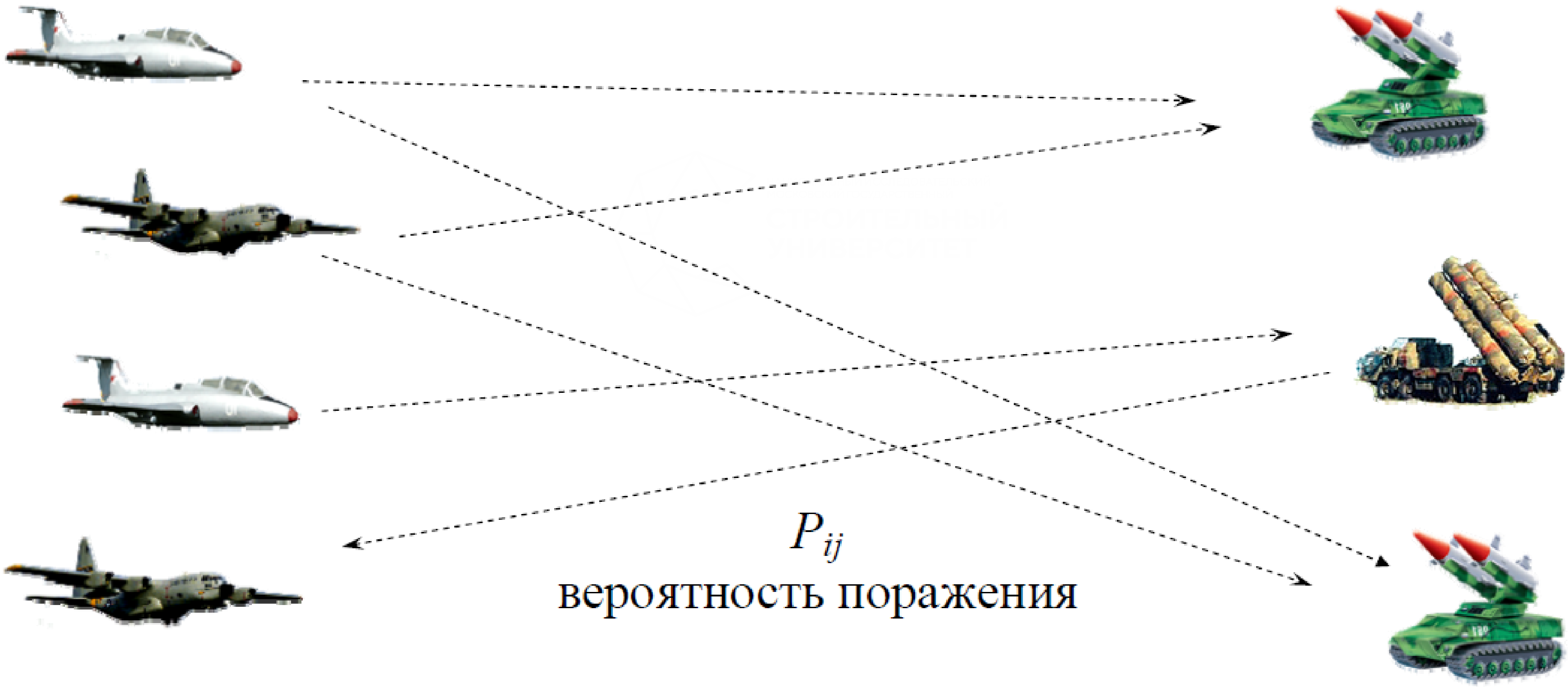
Задачи раскроя и упаковки





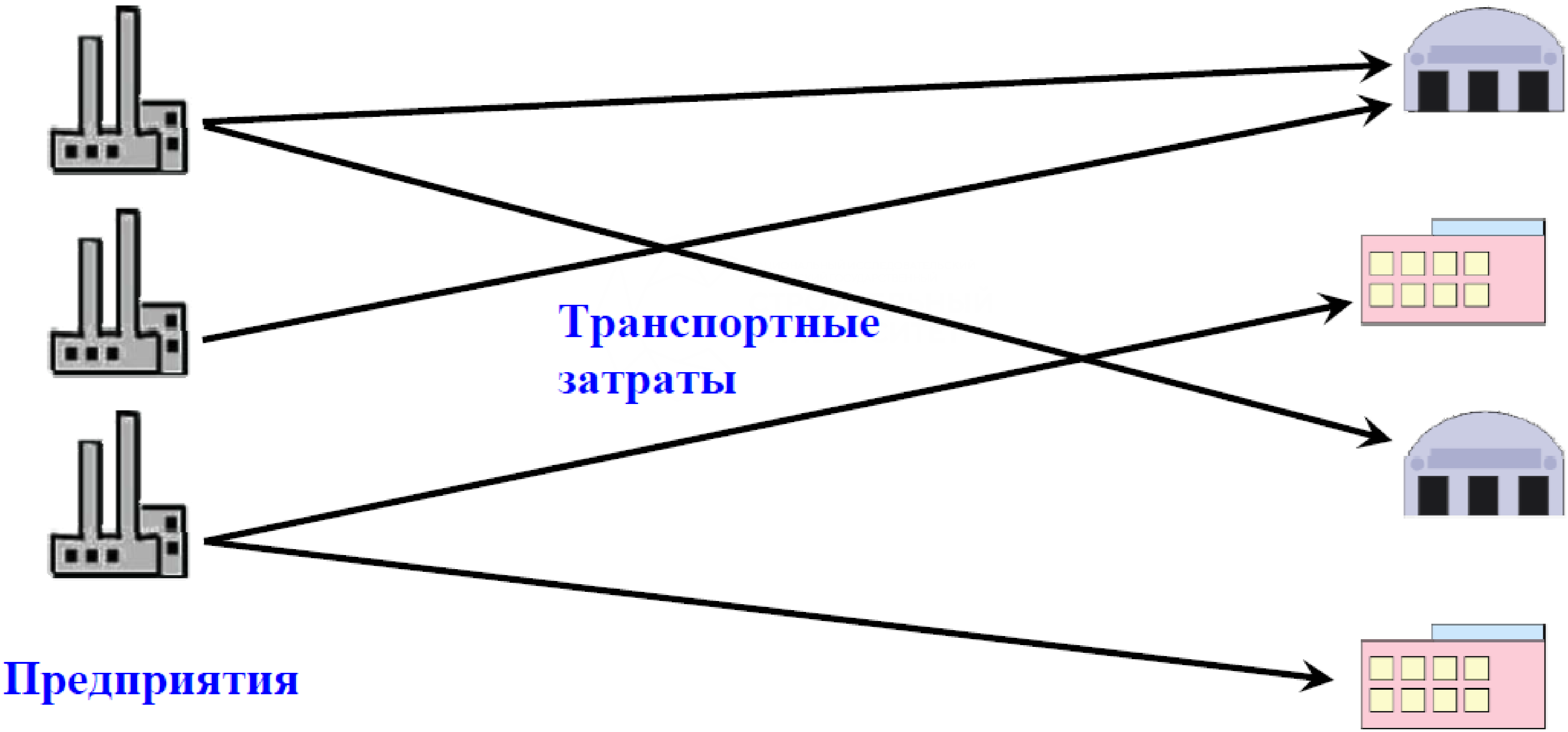
Раскрой пиломатериала, листового железа, станки с ЧПУ

Матричные игры



Транспортные задачи

Потребители



Минимизировать затраты на перевозку продукции

Задачи линейного программирования

Построение *математической модели* включает в себя следующие три этапа:

- выбор *переменных*;
- составление *системы ограничений*;
- задание *целевой функции*

ЗИО с детерминированными параметрами

Транспортные задачи

Задача о размещении (транспортная задача) – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах.

Транспортные задачи

- *Исходные параметры модели ТЗ*

  n – количество пунктов отправления,

  m – количество пунктов назначения,

  a_i – запас продукции в пункте отправления A_i $(i=\overline{1,n})$ [ед. прод.],

  b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j $(j=\overline{1,m})$ [ед. прод.],

  c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. прод.].

-

Транспортные задачи

- *Искомые параметры модели ТЗ*
  - x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.]
  - $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.]

Транспортные задачи

Этапы построения модели

1. Определение переменных.
2. Проверка сбалансированности задачи.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание целевой функции (ЦФ).
5. Задание ограничений.

Транспортные задачи

Транспортная модель

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,m}, \\ x_{ij} \ge 0 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

Задача о назначении

- *Исходные параметры модели*
  - n – количество ресурсов,
  - m – количество работ,
  - $a_i = 1$ – единичное количество ресурса A_i $(i = \overline{1, n})$
  - $b_j = 1$ – единичное количество работы B_j $(j = \overline{1, m})$
  - c_{ij} – характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i.

Задача о назначении

- *Искомые параметры модели ТЗ*
  – x_{ij} – факт назначения или неназначения ресурса A_i на работу B_j

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i\text{-й ресурс не назначен на } j\text{-ю работу}, \\ 1, \text{ если } i\text{-й ресурс назначен на } j\text{-ю работу}. \end{cases}$$

  – $L(X)$ – общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам

Задача о назначении

Модель задачи

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}=1\ \left(i=\overline{1,n}\right),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1\left(j=\overline{1,m}\right),\\ x_{ij}=\begin{cases}0,\\1,\end{cases}\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right).\end{cases}$$

Задача коммивояжера

Исходные данные

n – объектов / мест / городов

c_{ij} – стоимость переезда из i-го объекта/города в j-й (i=1,..,n j=1,..,n), выраженная:

1) Расстоянием (км)
2) временем (ч., мин.)
3) затратами на переезд (ден. ед.)

Искомые данные

– x_{ij} – факт посещения или непосещения объекта из i в j.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если коммивояжер из города i переезжает в город j; } j, i = 1,2,\dots,n; \ j \neq i; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

– $L(X)$ – общая (суммарная) характеристика

Задача коммивояжера

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

1) из каждого города коммивояжер выезжает только 1 раз:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}\quad(2)$$

2) в каждый город коммивояжер въезжает 1 раз:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}\quad(3)$$

3) замкнутость маршрута и отсутствие петель

$$u_i-u_j+n\cdot x_{ij}\le n-1\quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n},\ i\ne j\quad(4)$$

где u_i ,u_j – произвольные действительные числа , u_i принимает значение k, если коммивояжер прибыл в i-й город после k-го переезда.

Задача распределения ресурсов

Исходные данные

- C – объем ресурсов, которые необходимо распределить между различными объектами [ед.],
- $f_i(x_i)$ – эффективность работы каждого объекта [ед.], $(i = \overline{1, n})$
- n – количество объектов

Искомые данные

- x_i – количество ресурсов, выделяемых i-му объекту [ед.]. $(i = \overline{1, n})$
- z – суммарная эффективность работы [ед.]

Модель

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n) \longrightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n - \text{целые}$$

Элементы модели задачи распределения ресурсов

1. *Этап* i ставится в соответствие i-му объекту, i = 1,2,..., n.
2. *Вариантами решения* на i-м этапе описываются количеством x_i выделенных ресурсов i-му объекту.
3. *Состояние* на i-м этапе S_i выражает оставшиеся ресурсы.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{x_k}\left\{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k)\right\} =$$

$$= \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}}\left\{ f_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\right\} \qquad \text{где } Z_{n+1}(S_n)=0$$

Задача о загрузке

Исходные данные

- W – грузоподъемность судна [ед.],
- r_i – прибыль, которую приносит один загруженный предмет i-го наименования, [ед.] $(i=\overline{1,n})$
- w_i – вес одного предмета i-го наименования [ед.] $(i=\overline{1,n})$
- n – количество наименований предметов

Искомые данные

- m_i – количество предметов i-го наименования, подлежащих загрузке, [шт] $(i=\overline{1,n})$
- z – прибыль от загрузки [ден.ед.]

Математическая постановка задачи о загрузке

Максимизировать

$$z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_n m_n$$

при условии, что

$$w_1 m_1 + w_2 m_2 + \ldots + w_n m_n \leq W$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$ - целые

Элементы модели задачи о загрузке

1. *Этап* i ставится в соответствие предмету i-го наименования, i=1,2,..., n.

2. *Варианты решения* на этапе i описываются количеством m_i предметов i-го наименования, подлежащих загрузке. Соответствующая прибыль равна $r_i m_i$. Значение m_i, заключено в пределах от 0 до $[W/w_i]$, где $[W/w_i]$ – целая часть числа W/w_i.

3. *Состояние* x_i, на этапе i выражает суммарный вес предметов, решения о погрузке которых приняты на этапах i, i + 1,…, n. Это определение отражает тот факт, что ограничение по весу является единственным, которое связывает n этапов вместе.

Функциональные уравнения Беллмана

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ x_i = 0,1,\dots,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, \; i = 1,2,\dots,n,$$

где $f_{n+1}(x_{n+1})=0$

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i = 0,1,\dots,\left[\frac{W}{w_i}\right] \\ x_i = 0,1,\dots,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \; i = 1,2,\dots,n,$$

Качественная и математическая постановка задачи о замене оборудования

Исходные данные

- n – эксплуатация механизма [лет],
- $r(t)$ – прибыль от эксплуатации t-летнего механизма на протяжении года, [ден.ед.]
- $c(t)$ – затраты на его обслуживание за этот же период, [ден.ед.]
- $s(t)$ – стоимость продажи механизма, который эксплуатировался t лет. [ден.ед.]
- I - стоимость приобретения нового механизма [ден.ед.]

Искомые данные

- U_i – решение либо об эксплуатации механизма еще один год, либо о замене его новым, $(i = \overline{1, n})$
- $f_i(t)$ – прибыль, получаемая за годы от i до n при условии, ~~что~~ в начале i-го года имеется механизм t-летнего возраста [ден.ед.] $(i = 1, n)$

Элементы модели задачи о замене оборудования

1. *Этап* i представляется порядковым номером года i, $i = 1,2,\ldots, n$.
2. *Вариантами решения* на i-м этапе (т.е. для i-*го* года) являются альтернативы: *продолжить эксплуатацию* или *заменить* механизм в *начале* i-*го* года.
3. *Состоянием* на i-м этапе является срок эксплуатации t (возраст) механизма к началу i-го года.

Функциональные уравнения Беллмана

$$f_i(t) = \max\begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1), \text{ если эксплуатировать}, \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1), \text{ если заменить}. \end{cases}$$

$$(i = \overline{1, n})$$

Замечание. Если после *n* лет эксплуатации оборудование продается, то для последнего этапа рекуррентное уравнение будет иметь вид:

$$f_n(t) = \max\begin{cases} r(t) - c(t) + s(t+1), \text{ если эксплуатировать}, \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + s(1), \text{ если заменить}. \end{cases}$$

Задача планирования рабочей силы

Исходные данные

- n – количество недель,
- b_i — минимальная потребность в рабочей силе на протяжении i–й недели $(i=\overline{1,n})$
- C_1 – содержание избытка рабочей силы, [ден.ед.]
- c_1 – наем рабочей силы на протяжении одной недели, [ден.ед.]
- c_2 – наем одного рабочего, [ден.ед.]

Искомые данные

- x_i — количество работающих на протяжении i–й недели $(i=\overline{1,n})$
- $f_i(t)$ – затраты на планирование рабочей силы в течение n недель [ден.ед.] $(i=\overline{1,n})$

Элементы модели задачи планирования рабочей силы

1. Этап i представляется порядковым номером недели i, $i=1,2,.., n$.

2. Вариантами решения на i-м этапе являются значения x_i – количество работающих на протяжении i–й недели.

3. Состоянием на i-м этапе является x_i – количество работающих на протяжении (i–1)-й недели (этапа).

Функциональные уравнения Беллмана

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_{i1} \geq b_i}\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, i = 1, 2, ..n,$$

$C_1(x_i – b_i)$ — затраты, связанные с необходимостью содержать избыток $x_i – b_i$ рабочей силы

$C_2(x_i – x_{i-1})$ — затраты, связанные с необходимостью дополнительного найма $x_i – x_{i-1}$ рабочих.

Пример

Средства x, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Пример

1	2	3	4	5	6	7
$S_3 \quad x_4$	0	20	40	60	$Z_4(S_3)$	x_4^*
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

x_3^*

Пример

$g_3(x)$
0
14
21
34

6
$Z_4(S_3)$
0
14
20
35

	1	2	3
1	S_2 \ X_3	0	20
2	0	0+0=0	
3	20	0+14=14	14+0=14
4	40	0+20=20	14+14=28
5	60	0+35=35	14+20=34

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_2 \ X_3	0	20	40	60	$Z_3(S_2)$	x_3^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	14+0=14			14	0 или 20
4	40	0+20=20	14+14=28	21+0=21		28	20
5	60	0+35=35	14+20=34	21+14=35	34+0=34	35	0 или 40

x_2^*

Пример

$f_3(x)$
0
6
23
30

$Z_3(S_2)$
0
14
28
35

	1	2	3
1	S_1 \ x_2	0	20
2	0	0+0=0	
3	20	0+14=14	6+0=6
4	40	0+28=28	6+14=20
5	60	0+35=35	6+28=34

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_1 \ X_2	0	20	40	60	$Z_2(S_1)$	x_2^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	6+0=6			14	0
4	40	0+28=28	6+14=20	23+0=23		28	0
5	60	0+35=35	6+28=34	23+14=37	30+0=30	37	40

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_0 \ x_1	0	20	40	60	$Z_1(S_0)$	x_1^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	7+0=7			14	0
4	40	0+28=28	7+14=21	23+0=23		28	0
5	60	0+37=37	7+28=35	23+14=37	31+0=31	37	0 или 40

	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
0	0	0	0	0
20	0	0	0 или 20	20
40	0	0	20	40
60	0 или 40	40	0 или 40	60

Задача. Строительный подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из последующих пяти недель следующим образом: 5,7,8,4 и 6 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится подрядчику в 300 долларов за одного рабочего в неделю, а наем рабочей силы на протяжении одной недели обходится в 400 долларов плюс 200 долларов за одного рабочего в неделю.

Замена форвардера

Рассматривается эксплуатация форвардера в течении шести лет. В начале каждого года может быть принято решение о замене машины новой.

Стоимость нового форвардера на **i** шаге эксплуатации составляет $\mathbf{z_i=50000+5000(i-1)}$ долларов. После **t** лет эксплуатации машину можно продать за $\mathbf{s(t)=z_i 2^{-t}}$ долларов. Стоимость содержания машины в течении **i** года составляет $\mathbf{g(t)=0.1z_i*(t+1)}$ долларов. Найти оптимальный способ эксплуатации машины: когда нужно заменить машину новой, чтобы суммарные затраты (с учетом затрат на покупку новой машины в начале срока эксплуатации и компенсации за счет заключительной продажи) были минимальны.

Динамическое программирование

Замена форвардера

Процесс эксплуатации форвардера описывается шестью шагами. Состояние $\mathbf{s_{i-1}}$ системы в начале **i** шага характеризуется одним параметром **t** – возрастом машины. Управление на каждом шаге состоит в выборе одного из двух решений: $\mathbf{u_c}$ – решение, состоящее в сохранении форвардера, или $\mathbf{u_з}$ – решение, состоящее в его замене. Основные функциональные уравнения модели динамического программирования имеют вид:

$$W_i(t) = \min \begin{cases} g_i(t) + W_{i+1}(t+1), & u_i=u_c \\ z_i + g_i(0) - s_i(t) + W_{i+1}(1), & u_i=u_з \end{cases} \quad , i<6$$

Для шестого шага:

$$W_6(t) = \min \begin{cases} g_6(t) - s_7(t+1), & u_6=u_c \\ z_6 + g_6(0) - s_6(t) - s_7(1), & u_6=u_з \end{cases} \quad , i=6$$

Подставляя уравнения задачи в первую систему, получаем

$$W_i(t) = \min \begin{cases} 500(t+1)(i+9) + W_{i+1}(t+1), & u_i=u_c \\ 5000(i+9)(1.1-2^{-t}) + W_{i+1}(1), & u_i=u_з \end{cases} \quad , i<6$$

Динамическое программирование

Замена форвардера

Подставляя уравнения задачи в систему для шестого шага, получаем

$$W_6(t) = \min \begin{cases} 7500(t+1) - 80000 \cdot 2^{-t+1},\ u_6 = u_c \\ 42500 - 75000 \cdot 2^{-t},\ u_6 = u_з \end{cases},\ i=6,\ t=0..5$$

Рассчитываем два варианта исхода 6 шага в зависимости от срока предыдущей эксплуатации форвардера (1-5 лет, 0 лет ему быть не может, т.к. рассматривается начало 6 года, и смена форвардера на новый в начале года, а не в конце).

t	сохранение $W_6(t)$	замена	Вывод
1	-5000	5000	u_c
2	12500	23750	u_c
3	25000	33125	u_c
4	35000	37812	u_c
5	43750	40156	$u_з$

Динамическое программирование

$$W_i(t)=\min\begin{cases} 500(t+1)(i+9) + W_{i+1}(t+1),\ u_i=u_c \\ 5000(i+9)(1.1-2^{-t}) + W_{i+1}(1),\ u_i=u_з \end{cases}$$

i	6					5				4			3		2	1
t	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1	0
500(t+1)(i+9)						14000	21000	28000	35000	13000	19500	26000	12000	18000	11000	5000
Wi(t,Uc)	-5000	12500	25000	35000	43750	26500	46000	63000	75156	59000	82500	93625	93750	107875	118875	173875
5000(i+9)(1.1-2^t)						42000	59500	68250	72625	39000	55250	63375	36000	51000	33000	
Wi+1(1)						-5000	-5000	-5000	-5000	26500	26500	26500	59000	59000	93750	
Wi(t,Uз)	5000	23750	33125	37812	40156	37000	54500	63250	67625	65500	81750	89875	95000	110000	126750	
Ui(t)	Uc	Uc	Uc	Uc	Uз	Uc	Uc	Uc	Uз	Uc	Uз	Uз	Uc	Uc	Uc	Uc

При прямом проходе по рассчитанным данным получается, что на 1 году форвардер новый (0 лет), на начало второго года ему однозначно будет 1 год (t=1, выбираем Uc), на начало третьего года ему будет 2 года (выбираем Uc в столбике i=3, t=2), на четвертом форвардер находится в эксплуатации уже 3 года, поэтому меняем его на новый, которому к началу 5 года "стукнет" 1 год.

Безусловная оптимизация приводит к результату: W*=173875 долларов; оптимальное решение $\mathbf{U^*=(u_c,u_c,u_c,u_з,u_c,u_c)}$. Сл., приобретенный форвардер целесообразно эксплуатировать в течении трех лет, на четвертом году его следует заменить новым и продолжать эксплуатировать оставшееся время.